

ČESKÁ SPOLEČNOST PRO JAKOST
Novotného lávka 5, 116 68 Praha 1

**VYUŽITÍ BAYESOVSKÝCH
METOD K ŘEŠENÍ
PRAKTICKÝCH PROBLÉMŮ
ZPRACOVÁNÍ DAT PRO
OCENĚNÍ SPOLEHLIVOSTI**



**Materiály z 29. setkání
odborné skupiny pro spolehlivost**

Praha, listopad 2007

Obsah:

Aktualizace pravděpodobností na základě Bayesovy věty	5
<i>Milan Holický, Kloknerův ústav ČVUT v Praze</i>	
Bayesův přístup pro demonstraci spolehlivosti vysoce spolehlivých prvků	29
<i>Doc. Ing. Radim Briš, CSc., VŠB-TU Ostrava, Fakulta elektrotechniky a informatiky, Katedra aplikované matematiky</i>	
Využití Bayesovské analýzy při kvantifikaci parametrů modelů spolehlivosti a rizik jaderně-energetických technologií	54
<i>Jaroslav Holý, Oddělení analýz spolehlivosti a rizik, Ústav jaderného výzkumu Řež, 25068, Řež</i>	
Praktické aplikace Bayesovských metod ve stavebnictví	73
<i>Milan Holický a Miroslav Sýkora^{1,1} České vysoké učení technické v Praze, Kloknerův ústav</i>	

Aktualizace pravděpodobností na základě Bayesovy věty

Milan Holický, Kloknerův ústav ČVUT v Praze

Souhrn

Nejistoty technických systémů lze rozdělit na náhodnosti a noetické (vědomostní) nejistoty. Náhodnosti zahrnují vlastní (přirozené) proměnlivosti, noetické nejistoty zahrnují statistické a modelové nejistoty, neurčitosti a nedostatečné znalosti. Při popisu nejistot se uplatňuje fyzikální (objektivní) i Bayesovská (subjektivní) interpretace pravděpodobnosti. Fyzikální interpretace, která navazuje na klasickou definici pravděpodobnosti, však v některých praktických aplikacích selhává. V těchto případech se účinně uplatňuje Bayesovská interpretace, která je v současné době podepřena axiomatickou definicí pravděpodobnosti. Související koncepce podmíněné pravděpodobnosti, věta o úplné pravděpodobnosti a Bayesova věta se efektivně uplatňují při aktualizaci pravděpodobnosti na základě apriorních poznatků a nově získaných informací. Na základě Bayesovy věty se v nedávné době rychle rozvíjejí tak zvané Bayesovské (příčinné) sítě, které nacházejí široké uplatnění v řadě technických i jiných oblastí.

1 Náhodný jev

Teorie pravděpodobnosti se snaží popsat nejistoty, se kterými se setkává řada technických i jiných oblastí. Ukazuje se, že teorii spolehlivosti stavebních konstrukcí se střetává s řadou nejistot [1], které lze rozdělit do dvou hlavních skupin.

Náhodnosti (aleatoric uncertainty), které zahrnují především

- přirozenou proměnlivost.

Noetické (vědomostní) nejistoty (epistemic uncertainty), které zahrnují

- statistické nejistoty,
- modelové nejistoty,
- neurčitosti, vágnosti,
- nedostatek znalostí.

Klasická teorie pravděpodobnosti se opírá o několik základních pojmů, mezi něž patří pokus, náhodný jev, jevové pole. Pokusem se obecně rozumí realizace určitého souboru podmínek π . Klasické pojetí teorie pravděpodobnosti tedy předpokládá, že pokusy lze libovolně opakovat (např. házení hrací kostkou, zatěžovací zkoušky betonové krychle). Výsledek každého pokusu je pak popsán výrokem, který umožňuje jednoznačně rozhodnout, zda určitý jev nastal či nenastal.

Rozsáhlé praktické aplikace obecných pojmů a postupů ve skutečných podmínkách však s představou libovolně opakovatelných pokusů, z nichž každý vede k jednoznačnému výsledku (i když předem neznámému), nevystačí. Moderní teorie pravděpodobnosti proto přijímá obecnější pojetí, při kterém se termíny pokus, jev a jevové pole opírají o obecnou teorii množin, kterou lze uplatnit při popisu nejen náhodností ale i ostatních noetických nejistot.

Termín pokus má proto dále široký význam: zahrnuje takové realizace podmínek π , které lze ve skutečnosti libovolně opakovat, ale i takové pokusy, které lze uskutečnit pouze jednou, nebo vůbec ne (popř. pouze hypoteticky). Důležité jsou v každém případě podmínky π , které je třeba co nejpřesněji a nejúplněji vymezit, a k nimž je třeba výsledky pokusu a jejich praktické interpretace soustavně vztahovat. Porovnávání pokusů provedených za odlišných podmínek může vést k závažným chybám a nedorozumění. Popis příslušného

souboru podmínek a jejich ověření by se proto mělo stát nedílnou součástí každého pravděpodobnostního rozboru.

Teorie pravděpodobnosti se zabývá takovými pokusy, jejichž výsledek není předem jednoznačně určen příslušným souborem podmínek π , popř. takovými pokusy, pro něž soubor podmínek, který by vedl k jednoznačnému výsledku, nelze při pokusech zajistit, nebo který není vůbec znám (známá je pouze část takového souboru). Pokusu tohoto druhu se říká náhodný pokus. Výsledek náhodného pokusu popisují jevy, které při realizaci podmínek π mohou, ale nemusí nastat. Takové jevy se nazývají náhodné jevy a označují se obvykle velkým písmenem z počátku abecedy, např. A nebo B (popř. s indexem). Jev, který nutně nastane při každé realizaci podmínek π , je jev jistý – označíme jej U ; jev, který nemůže nikdy nastat, je jev nemožný – označíme jej V .

Jevovým polem A určitého náhodného pokusu rozumíme všechny jevy, které mohou nastat realizací stanoveného souboru podmínek π , tj. mohou být výsledkem příslušného pokusu. Jevové pole může být konečné (házení hrací kostkou), nebo nekonečné (zkoušení betonové krychle ve zkušebním stroji). V některých případech lze nalézt systém elementárních jevů, tj. takových jevů, které nelze dále dělit (při hodu hrací kostkou padnutí jednoho z čísel 1 až 6). V jiných případech systém elementárních jevů není zřejmý nebo neexistuje (zkoušení krychle ve zkušebním stroji).

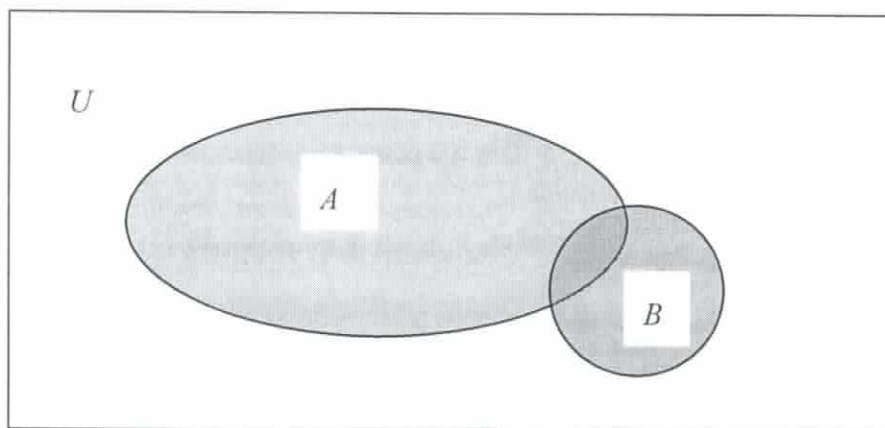
Uvedené základní pojmy náhodný pokus, soubor podmínek π , jev a jevové pole jsou osvětleny na třech jednoduchých příkladech, které jsou neoddělitelnou součástí tohoto stručného souhrnu. Kromě podrobného doplňujícího výkladu základních pojmů, zařazené příklady uvádějí některé obecnější poznatky a poukazují na nesnáze při popisu skutečných podmínek matematickými prostředky a na nezbytnost přijímat zjednodušující předpoklady.

Příklad 1. Tradičním (a z instruktivního hlediska velmi užitečným) příkladem je náhodný pokus spočívající ve vrhu hrací kostkou. Soubor podmínek π je triviální: hrací kostka je vyvážená a symetrická, hod se provádí tak, aby se neovlivňovala poloha kostky při dopadu. Jev jistý U značí padnutí některého z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, jev nemožný V padnutí ostatních čísel. Elementární jevy E_i , $i = 1, 2$ až 6, které nelze dále dělit, označují padnutí čísla $i = 1, 2$ až 6. Pokud je splněn uvedený soubor podmínek π , je výskyt každého elementárního jevu E_i stejně možný. V tomto případě říkáme, že jde o systém stejně možných elementárních jevů. Další náhodné jevy lze označit např. takto: $A_1 = E_1$ padnutí čísla 1, $A_2 = E_2 \cup E_4 \cup E_6$ padnutí čísla dělitelného dvěma, $A_3 = E_3 \cup E_6$ padnutí čísla dělitelného třemi, $A_4 = E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_6$ padnutí čísla dělitelného dvěma nebo třemi apod. Jevové pole A (tj. souhrn všech možných jevů, které mohou nastat při hodu) je v tomto případě zřejmě konečné.

Příklad 2. Vyšetřuje se krychelná pevnost betonu, náhodný pokus spočívá v zatěžování betonové krychle ve zkušebním lisu. Soubor podmínek π zahrnuje složení, zpracování a stáří betonu, rozměry krychle, způsob zatěžování apod. Za náhodný jev se považuje porušení betonové krychle při určité hladině zatížení. Bude-li zatížení dostatečně vysoké, dojde k porušení vždy, při nízkém zatížení nedojde k porušení nikdy, při hodnotách zatížení odpovídajících charakteristické hodnotě krychelné pevnosti betonu k porušení může dojít (např. v 5% případů), ale nemusí (např. v 95% případů). Elementární jevy je možné definovat pouze aproximativně, např. prostřednictvím systému stejně širokých intervalů v určitém oboru. Nepochybně nejde o systém stejně možných jevů. Jevové pole A obsahuje libovolný jednostranně nebo oboustranně ohraničený interval a je tedy nekonečné.

Příklad 3. Představme si, že budeme házet šipkou na tabuli; každý hod představuje jednu realizaci náhodného pokusu. Soubor podmínek zahrnuje vzdálenost tabule, její velikost,

druh šipky a ostatní podmínky házení. Předpokládáme, že každý bod tabule může být zasažen stejně často, a že tabuli nikdy nemineme (nepochybně velmi sporné předpoklady). Zásah celé tabule je tedy jev jistý U . Nemožný jev V je hod mimo tabuli. Náhodný jev však může spočívat v zasažení kterékoliv menší oblasti A nakreslené na tabuli (obrázek 1) nebo některé kombinace takových oblastí. Systém všech možných oblastí tabule představuje nekonečné jevové pole.



Obr. 1. Příklad házení šipkou na tabuli - Vennův diagram.

Uvedené příklady vedou k obvyklému znázornění náhodných jevů (viz obrázek 1) pomocí plošných obrazců, které se využívají pro ilustraci vzájemných vztahů mezi náhodnými jevy A, B, C, \dots (v literatuře se takové znázornění označuje jako Vennův diagram). Na obrázku 1 je jev jistý U znázorněn celým obdélíkem, dva náhodné jevy A a B jsou schematicky znázorněny ovály. Uveďme základní vztahy mezi jevy A a B , které vedou k definici dalších důležitých pojmů a k odvození některých obecných relací mezi náhodnými jevy. Všechny níže uvažované vztahy a kombinace náhodných jevů je možno znázornit pomocí plošných diagramů.

Jestliže při každé realizaci podmínek π , při které nastal jev A , nastane i jev B , říkáme, že jev A implikuje jev B , což se zpravidla symbolicky zapisuje výrazem $A \subset B$. Jestliže při každé realizaci podmínek π nastane současně jak jev A , tak jev B , nastane průnik obou jevů označený $A \cap B$. Jestliže při každé realizaci podmínek π nastane aspoň jeden z jevů A a B , nastane sjednocení obou jevů označené $A \cup B$, jestliže nastane jev A , ale nenastane jev B , nastane rozdíl těchto jevů $A - B$. Jevy A a \bar{A} jsou jevy doplňkové, (říkáme také, že jev \bar{A} je opačný k jevu A), jestliže současně platí $A \cup \bar{A} = U$ a $A \cap \bar{A} = V$. Lze ukázat, že pro průnik a sjednocení náhodných jevů platí následující jednoduchá pravidla (komutativní, asociativní a distributivní zákon):

$$A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A \quad (1)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (2)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (3)$$

Tato základní pravidla vedou k definici složitějších relací pro průnik a sjednocení systému jevů A_i :

$$\begin{aligned}\bigcap_i A_i &= A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n \\ \bigcup_i A_i &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n\end{aligned}\tag{4}$$

Při praktickém výpočtu pravděpodobností složitých jevů se někdy účinně uplatňují následující pravidla (tak zvaná de Morganova pravidla), jejichž platnost plyne z předchozích vztahů

$$\begin{aligned}\overline{\bigcap_i A_i} &= \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_n} \\ \overline{\bigcup_i A_i} &= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}\end{aligned}\tag{5}$$

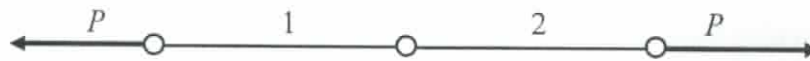
Použití těchto pravidel je patrné z následujících dvou příkladů.

Příklad 4. Jednoduchý sériový systém je podle obrázku 2 sestaven ze dvou prvků a zatížen dvojicí sil o velikosti P . Porucha systému F může nastat poruchou F_1 prvku 1 nebo poruchou F_2 prvku 2:

$$F = F_1 \cup F_2$$

Bezporuchový stav \overline{F} je popsán jevem, pro který ze vztahu (5) plyne vztah

$$\overline{F} = \overline{F_1 \cup F_2} = \overline{F_1} \cap \overline{F_2}$$

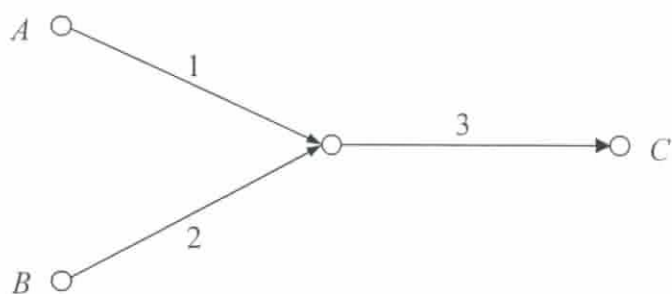


Obr. 2. Sériový systém.

Příklad 5. Město C je zásobováno vodou ze dvou zdrojů A a B potrubím, které má tři samostatné větve 1, 2 a 3 (viz schéma na obrázku 3). Označme F_1 poruchu větve 1, F_2 poruchu větve 2 a F_3 poruchu větve 3. Jestliže každý ze zdrojů A a B má dostatečnou kapacitu k zásobování města C , pak nedostatek vody v městě je popsán jevem $(F_1 \cap F_2) \cup F_3$, tj. nastane současně porucha ve větvích 1 a 2 nebo porucha ve větvi 3. Pro rozbor tohoto jevu může být však účelné sledovat doplňkový jev popisující dostatek vody v městě C . Podle de Morganových pravidel (5) je doplňkový jev, tj. dostatek vody v městě C popsán jevem

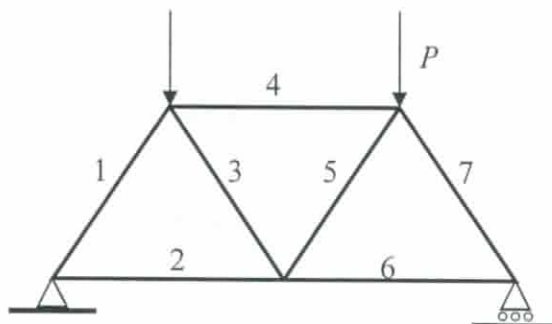
$$\overline{(F_1 \cap F_2) \cup F_3} = (\overline{F_1} \cup \overline{F_2}) \cap \overline{F_3}$$

kde jev $(\overline{F_1} \cup \overline{F_2})$ představuje dostatek vody v místě spojení větví 1 a 2, který je současně počátkem větve 3.



Obr. 3. Systém dodávky vody ze zdrojů A a B do města C .

Příklad 6. Uvažujme staticky určitou příhradovou konstrukci podle obrázku 4, která se skládá ze sedmi prutů a je zatížena dvojicí sil P . Úkolem je popsat jev F , že nastala porucha konstrukce. Označme F_i jev, že nastala porucha prvku $i = 1, 2, \dots, 7$.



Obr. 4. Staticky určitá příhradová konstrukce.

Porucha celé konstrukce (jev F) nastane, jestliže dojde k poruše aspoň jednoho ze sedmi prvků. Platí tedy

$$F = \bigcup_{i=1}^7 F_i$$

S ohledem na výrobní podmínky jednotlivých prvků mohou být jevy F_i vzájemně závislé a nejsou tedy disjunktní. Při výpočtu pravděpodobnosti poruchy může být pak výhodné pracovat s doplňkovým jevem \bar{F} , pro který podle de Morganových pravidel (5) platí

$$\bar{F} = \overline{\bigcup_{i=1}^7 F_i} = \bigcap_{i=1}^7 \bar{F}_i$$

Podobný obrat se často s výhodou využívá při pravděpodobnostním rozboru složitějších technických systémů.

Připomeneme ještě některé další důležité pojmy. Říkáme, že systém jevů A_i tvoří úplný systém jevů, jestliže jejich sjednocení je jev jistý U . Při rozboru složitých jevů se někdy uplatňuje úplný systém navzájem disjunktních jevů.

2 Definice pravděpodobnosti

Definice pravděpodobnosti prošla poučným vývojem, který vypovídá o pozoruhodném rozvoji teorie pravděpodobnosti i jejích praktických aplikacích. Klasická definice pravděpodobnosti se opírá o úplný systém elementárních jevů. Necht' se jev A rozpadá na m z celkového počtu n stejně možných elementárních jevů, který je vytvořen úplným systémem navzájem disjunktích jevů. Pravděpodobnost jevu A je pak dána podílem

$$P(A) = m / n \quad (6)$$

Pro takto definovanou pravděpodobnost zřejmě platí

$$0 \leq P(A) = m / n \leq 1 \quad (7)$$

$$P(U) = n / n = 1, P(V) = 0 / n = 0 \quad (8)$$

Pro systém navzájem disjunktích jevů A_i lze dále ukázat, že pravděpodobnost sjednocení těchto jevů je dána vztahem

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (9)$$

Klasická definice pravděpodobnosti zcela vyhovuje v řadě elementárních případů, jako je házení hrací kostkou v příkladu 1. Jestliže však hrací kostka nebude souměrná, klasická definice očividně selhává. Příklady 2 a 3 dále naznačují, že v praktických případech nelze vystačit s konečným systémem elementárních jevů. Ve snaze řešit tyto nedostatky se postupně objevily další definice pravděpodobnosti.

Geometrická definice pravděpodobnosti navazuje na házení šipkou v příkladu 3. Podle této definice je pravděpodobnost jevu A podílem jeho plošného obsahu $\text{obs}(A)$ a obsahu jistého jevu U $\text{obs}(U)$, tedy podílem

$$P(A) = \text{obs}(A) / \text{obs}(U) \quad (10)$$

a snaží se odstranit nedostatek, kterým je v klasické definici příklad konečného počtu elementárních jevů. Ale ani tato definice neobstojí při námitce, že ne všechny body na tabuli (jev U) mají stejnou možnost výskytu a "obsah" není tedy odpovídající mírou výskytu. Tomuto nedostatku se snaží vyhnout další pokusy o definici pravděpodobnosti.

Statistická definice pravděpodobnosti vychází z výsledků mnohokrát opakovaného pokusu. Uvažujme posloupnost n realizací nějakého pokusu. Necht' při těchto n pokusech nastane určitý jev A v $m(A)$ pokusech. Ukazuje se, že relativní četnost výskytu jevu A , tj. zlomek $m(A)/n$, zachovává při dosti velkém n téměř konstantní hodnotu; větší odchylky od této hodnoty jsou tím vzácnější, čím je n větší. Tento úkaz se nazývá statistickou stabilitou relativních četností, tj. podílů $m(A)/n$. Hodnota, ke které se blíží relativní četnost $m(A)/n$ při zvyšujícím se $n \rightarrow \infty$, se přijímá za objektivní míru výskytu sledovaného jevu a nazývá se pravděpodobností $P(A)$ jevu A :

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(A)}{n} \quad (11)$$

U statistické definice pravděpodobnosti, která je vázána na výsledky pokusů, působí však statistická konvergence (tj. limita posloupnosti hodnot získaných jako náhodné výsledky) velké nesnáze.

Klasická, geometrická i statistická definice pravděpodobnosti se snaží pravděpodobnost nejen definovat, ale i navrhnout pravidlo k jejímu výpočtu. Zřejmě je to požadavek příliš vysoký, ne-li nemožný.

Dlouhodobá snaha o definování základních pojmů teorie pravděpodobnosti je dnes dovršena vytvořením tzv. axiomatického systému, přijatého a uznávaného na celém světě. Axiomatický systém pouze definuje pojem pravděpodobnosti a její vlastnosti, neudává však žádný praktický návod k jejímu stanovení.

Všimněme si, že rovnice (7) až (9), zachycují společné vlastnosti klasické, geometrické i statistické definice pravděpodobnosti:

1/ pravděpodobnost jistého jevu je rovna jedné;

2/ pravděpodobnost nemožného jevu je rovna nule;

3/ jestliže náhodný jev A je sjednocením částečných a vzájemně disjunktních jevů A_1, A_2, \dots, A_n , pak pravděpodobnost jevu A je rovna součtu pravděpodobností částečných jevů.

Axiomatická definice pravděpodobnosti tyto obecné vlastnosti předkládá ve formě axiomů. Pravděpodobnost P je reálná funkce, definovaná na jevovém poli \mathcal{A} nad jistým jevem U s těmito vlastnostmi:

1. Je-li $A \in \mathcal{A}$, pak

$$P(A) \geq 0 \quad (12)$$

2. Pro jistý jev U platí

$$P(U) = 1 \quad (13)$$

3. Je-li $A_i \in \mathcal{A}$, $i=1,2, \dots$ a je-li pro libovolná i a j $A_i \cap A_j = \emptyset$, pak

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (14)$$

Uvedené tři axiomy vyhovují nejen předchozím definicím pravděpodobnosti, ale i novějšímu pojetí pravděpodobnosti jako míry splnění určitého výroku nebo požadavku, která je stanovena často pouze intuitivně a subjektivně (jako expertní úsudek). V těchto případech se tedy zcela upouští od představy reprodukovatelných (opakovatelných) náhodných pokusů, které jsou základem pro stanovení pravděpodobnosti určitého jevu.

Poznamenáme, že v moderní teorii pravděpodobnosti se prostřednictvím shora uvedených axiomů přechází na obecnou teorii míry. Pravděpodobnost je pak definována jako nezáporná aditivní funkce množin, kterou si lze představit jako zobecnění pojmu "obsah" v geometrické definici. V této souvislosti se často hovoří o dvou základních interpretacích pravděpodobnosti.

- Fyzikální (objektivní) pravděpodobnost - navazuje na klasickou definici pravděpodobnosti jako relativní frekvence, přirozený trend, že jev nastane (logická pravděpodobnost).
- Bayesovská (subjektivní) pravděpodobnost - míra přesvědčení (věrohodnosti) s jakou dostupné informace podporují určitý výrok nebo uskutečnění určitého jevu.

Fyzikální interpretace pravděpodobnosti se uplatní především u náhodností (přirozené proměnlivosti), Bayesovská interpretace se s výhodou uplatňuje u ostatních noetických nejistot.

3 Základní pravidla pro výpočet pravděpodobností

Při výpočtu pravděpodobnosti jsou užitečná další pravidla, jejichž platnost lze odvodit z rovnic (6) až (9); popř. z axiomů (12) až (14).

Nechť A_i , $i=1, 2, \dots, n$, tvoří úplný systém jevů. Pak zřejmě platí

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P(U) = 1 \quad (15)$$

Jestliže jev A je sjednocením částečných navzájem disjunktních jevů $A_i, i = 1, 2, \dots, n$, lze napsat

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad (16)$$

Pro libovolné dva jevy A a B (které nemusí být disjunktní) platí pro pravděpodobnost jejich sjednocení věta o součtu pravděpodobností

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (17)$$

která plyne z (16) pro navzájem disjunktní jevy A a $B - (A \cap B)$, jejichž sjednocením je sledovaný jev $A \cup B$.

Jestliže $A_i, i = 1, 2, \dots, n$, je úplný systém navzájem disjunktních jevů, pak z rovnice (15) dostaneme

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = P(U) = 1 \quad (18)$$

Pro doplňkové jevy A a \bar{A} z rovnice (18) vyplývá

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (19)$$

Příklad 7. Stanovme pravděpodobnost bezporuchového stavu sériového systému podle příkladu 4. Necht' $P(F_1) = 0,05$, $P(F_2) = 0,05$ a $P(F_1 \cap F_2) = 0,02$. Pak vzhledem ke vztahu (17) zjistíme

$$P(F_1 \cup F_2) = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2) = 0,05 + 0,05 - 0,02 = 0,08$$

Všimněme si, že jevy F_1 a F_2 nejsou disjunktní (současně může dojít porušení obou prvků); kdyby byly disjunktní, pak by pravděpodobnost poruchy byla 0,10. Další podrobnosti k tomuto příkladu poskytne věta o součinu pravděpodobností, která je uvedena v následujícím oddílu.

4 Podmíněná pravděpodobnost

Podmíněná pravděpodobnost $P(A|B)$ jevu A za doplňující podmínky, že současně (nebo předem) nastal jiný jev B , jehož pravděpodobnost je nenulová, je důležitým pojmem moderních postupů teorie pravděpodobnosti, který se často uplatňuje také v teorii spolehlivosti. Podmíněná pravděpodobnost $P(A|B)$ je definována vztahem

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B) \quad (20)$$

Z tohoto vztahu vychází tak zvané Bayesovské pojetí teorie pravděpodobnosti (Thomas Bayes (1702 až 1761)). Důležitá zjednodušení vztahu (20) platí pro dva zvláštní případy. Jestliže jevy A a B jsou disjunktní, tj. platí $A \cap B = V$, pak $P(A|B) = 0$, jestliže jev A implikuje jev B , tj. platí $A \subset B$, pak $P(A|B) = P(A) / P(B)$, jestliže naopak $B \subset A$, pak $P(A|B) = 1$. Tyto vlastnosti plynou bezprostředně ze základních vlastností pravděpodobnosti uvedených v oddílech 2 a 3.

Z rovnice (20) plyne obecné pravidlo pro součin pravděpodobností

$$P(A \cap B) = P(B) P(A|B) \quad (21)$$

Všimněme si opět zvláštních případů. Jestliže jevy A a B jsou disjunktní, tj. platí $A \cap B = V$, pak $P(A|B) = 0$ a také $P(A \cap B) = 0$; jestliže $A \subset B$, pak $P(A|B) = P(A) / P(B)$ a $P(A \cap B) = P(A)$; jestliže naopak $B \subset A$, pak $P(A|B) = 1$ a $P(A \cap B) = P(B)$.

Říkáme, že jevy A a B jsou nezávislé (výskyt jevu B neovlivní pravděpodobnost výskytu jevu A), jestliže platí $P(A|B) = P(A)$. Zastavme se u shora uvažovaných zvláštních

případů. Jestliže jevy A a B jsou disjunktní, pak jsou závislé, neboť $P(A|B) = 0 \neq P(A)$ (pokud nejde o nemožný jev V); jestliže $A \subset B$, pak A a B jsou závislé jevy, neboť $P(A|B) = P(A) / P(B) \neq P(A)$, jestliže naopak $B \subset A$, pak jevy A a B jsou závislé, neboť $P(A|B) = 1 \neq P(A)$. Pro nezávislé jevy A a B tedy platí, že nejsou disjunktní, tj. $A \cap B \neq \emptyset$, a dále že splňují triviální vztahy $A \not\subset B$ a $B \not\subset A$.

Jestliže jevy A a B jsou nezávislé (a platí tedy $A \cap B \neq \emptyset$, $A \not\subset B$ a $B \not\subset A$), pak pro ně z rovnice (21) plyne

$$P(A \cap B) = P(A) P(B) \quad (22)$$

Vztah (22) je větou o součinu pravděpodobností, podle které pravděpodobnost průniku (současného výskytu) dvou nezávislých náhodných jevů je dána součinem jejich pravděpodobností.

Příklad 8. Pravděpodobnost poruchy sériového systému podle příkladu 7 může být s ohledem na vztah (21) vyjádřena vztahem

$$P(F) = P(F_1 \cup F_2) = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2) = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1)P(F_2|F_1) = 0,10 - 0,05 P(F_2|F_1)$$

Jestliže jevy F_1 a F_2 jsou nezávislé, pak $P(F_2|F_1) = P(F_2)$, a tedy

$$P(F) = P(F_1 \cup F_2) = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1) P(F_2) = 0,10 - 0,0025 = 0,0975$$

Jestliže jevy F_1 a F_2 jsou dokonale závislé ($F_1 \subset F_2$), tj. $P(F_2|F_1) = 1$, pak

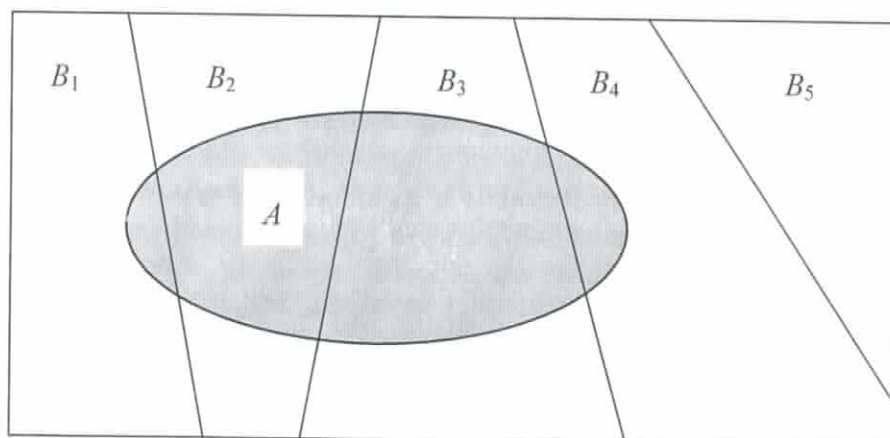
$$P(F) = P(F_1 \cup F_2) = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1) = 0,10 - 0,05 = 0,05$$

a sériový systém se v tomto případě chová jako jediný prvek. Obecně se však pravděpodobnost poruchy uvažovaného sériového systému pohybuje v intervalu od 0,05 do 0,0975 v návaznosti na stupeň závislosti jevů F_1 a F_2 .

Jestliže podle obrázku 2.5 jev A může nastat pouze realizací jednoho z navzájem disjunktních jevů B_i , $i = 1, 2, \dots, n$ (na obrázku 5 je $n = 5$), jejichž pravděpodobnosti jsou známy, a jsou-li také známy podmíněné pravděpodobnosti $P(A|B_i)$ (podle obrázku 5 je zřejmě $P(A|B_5) = 0$), pak pravděpodobnost jevu A může být stanovena ze vztahu

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) P(A|B_i) \quad (23)$$

který se nazývá věta o úplné pravděpodobnosti.



Obr. 5. Jev A a navzájem disjunktní jevy B_i .

5 Bayesova věta

Při uskutečnění jevu A se naskýtá přirozená otázka, který z jevů B_i vedl k uskutečnění jevu A , tj. jaká je pravděpodobnost jednotlivých hypotéz B_i , z nichž právě jedna byla splněna (viz obrázek 5), jinými slovy, jaká je pravděpodobnost $P(B_i|A)$. Ze vztahů (20), (21) a (23) plyne velmi důležitý vztah

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i) P(A | B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j) P(A | B_j)} \quad (24)$$

kteří se často nazývá Bayesova věta.

Obecný postup praktického použití Bayesovy věty lze popsat pomocí důležité úvahy z teorie spolehlivosti stavebních konstrukcí. Jestliže porucha konstrukce, jev A , může nastat v důsledku různých hypotéz B_i a z předchozích zkušeností jsou známy pravděpodobnosti $P(B_i)$ výskytu jednotlivých hypotéz B_i , a rovněž jsou známy podmíněné pravděpodobnosti $P(A|B_i)$, že nastala porucha A jako následek hypotézy B_i , pak pravděpodobnost poruchy A lze stanovit z věty pro úplnou pravděpodobnost (23). Jestliže však porucha A nastala, tj. nastal jev A , pak je důležitá otázka pravděpodobností jednotlivých hypotéz, které mohly poruchu vyvolat. Zajímají nás tedy podmíněné pravděpodobnosti $P(B_i|A)$, které lze stanovit z Bayesovy věty (24).

Praktické použití vztahů (23) a (24) je patrné z následujících příkladů.

Příklad 9. Při hodnocení existující železobetonové konstrukce jsou k dispozici výsledky kontrolních zkoušek, které opravňují k předpokladu, že skutečná pevnost je nižší než charakteristická hodnota 20 MPa (jev B_1) s pravděpodobností $p_1' = P(B_1) = 0,05$ a vyšší než 20 MPa (jev B_2) s pravděpodobností $p_2' = P(B_2) = 0,95$. K dodatečnému ověření jakosti betonu byla použita jednoduchá nedestruktivní metoda, která je však nepřesná. Označme A jev, že pevnost betonu stanovená nedestruktivní metodou je vyšší než 20 MPa. Chyby nedestruktivní metody lze vyjádřit podmíněnými pravděpodobnostmi

$$P(A|B_1) = 0,30, P(A|B_2) = 0,90$$

V důsledku nepřesnosti nedestruktivní metody může být tedy beton s pevností nižší než 20 MPa označen za beton s pevností vyšší než 20 MPa, a to s pravděpodobností 0,30, a beton s pevností vyšší než 20 MPa je označen za beton s touto pevností pouze s pravděpodobností 0,90.

Pravděpodobnost, že nastane jev A (nedestruktivní pevnost je označena za vyšší než 20 MPa) plyne z věty o úplné pravděpodobnosti (23)

$$P(A) = \sum_{i=1}^2 P(B_i) P(A | B_i) = 0,05 * 0,30 + 0,95 * 0,90 = 0,87$$

To znamená, že nepřesnou nedestruktivní metodou bude stanovena pevnost betonu vyšší než 20 MPa s pravděpodobností 0,87, i když při absolutně přesných zkouškách, tj. pokud by pro shora uvažované podmíněné pravděpodobnosti platilo

$$P(A|B_1) = 0, P(A|B_2) = 1$$

pak z rovnice (23) plyne

$$P(A) = \sum_{i=1}^2 P(B_i) P(A | B_i) = 0,05 * 0 + 0,95 * 1 = 0,95$$

Z praktického hlediska je však důležitější jiná otázka. Jaká je pravděpodobnost $P(B_2|A)$ hypotézy B_2 , že beton, pro který nedestruktivní zkouškou byla stanovena pevnost vyšší než 20 MPa (nastal tedy jev A), má skutečně pevnost vyšší než 20 MPa (a jde tedy o jev B_2). Tuto pravděpodobnost lze stanovit přímo z Bayesovy věty (24) pro pravděpodobnost hypotéz

$$P(B_2 | A) = \frac{P(B_2) P(A | B_2)}{\sum_{j=1}^2 P(B_j) P(A | B_j)} = \frac{0,95 * 0,90}{0,05 * 0,30 + 0,95 * 0,90} = 0,98$$

Jestliže tedy nedestruktivní zkouškou vyšla pevnost vyšší než 20 MPa, pak pravděpodobnost, že beton má skutečně tuto pevnost, se z původní hodnoty 0,95 zvýšila na 0,98.

Bayesova věta nalézají široké uplatnění v řadě dalších praktických případů inženýrské praxe, např. v těch, ve kterých je žádoucí aktualizovat předchozí informace o rozdělení pravděpodobností s ohledem na nově získané poznatky. Tento důležitý pravděpodobnostní postup je uveden v následujícím oddílu.

6 Aktualizace pravděpodobností

Bayesova věta (24) se často aplikuje při tak zvané aktualizaci rozdělení pravděpodobností, která se opírá o časově oddělené náhodné pokusy (často opakované). Stejně jako v oddílu 5 se předpokládá, že pravděpodobnosti $P(B_i)$ jsou známy z předchozí (někdy časově vzdálené, neurčité a pouze subjektivní) zkušenosti. Říkáme jim proto původní (apriorní) pravděpodobnosti a označují se jednoduše $p_i' = P(B_i)$.

S časovým odstupem se uskuteční pokusy, při nichž se zjistí podmíněné pravděpodobnosti $P(A|B_i)$ pozorovaného jevu A za předpokladu, že nastal právě jev B_i , a které lze pokládat za míru věrohodnosti, že příčinou jevu A byl právě jev B_i . Tyto podmíněné pravděpodobnosti, popř. k nim poměrné hodnoty, se proto nazývají věrohodnosti (likelihood) $l_i \propto P(A|B_i)$; značka \propto znamená "poměrný k" (věrohodnosti l_i nemusí být tedy nutně normalizovány na interval $< 0, 1 >$). Ptáme se na aktualizované (aposteriorní, anglicky často také updated) pravděpodobnosti $p_i'' = P(B_i|A)$ jevu (tj. hypotézy) B_i , aktualizované s ohledem na výsledek nového pokusu (jevu A). Z Bayesovy věty (24) plyne důležitý vztah pro p_i'' ve tvaru:

$$p_i'' = \frac{p_i' l_i}{\sum_j p_j' l_j} \quad (25)$$

Je zřejmé, že vzorec (25) platí obecně pro věrohodnosti l_i , které nejsou normalizovány na interval $< 0, 1 >$ (na rozdíl od pravděpodobností), a vyjadřují pouze relativní podíl jevů (hypotéz) B_i na pozorovaném jevu A .

Vztah (25) je základem pro aktualizaci pravděpodobností, která se často uplatňuje v řadě inženýrských postupů, zejména při hodnocení existujících konstrukcí. Právě v těchto případech se kombinují předchozí (často subjektivní) informace s aktuálními poznatky, tj. informace o konstrukci v různých časových okamžicích, obvykle s velkým časovým odstupem. Proto je třeba ověřit podmínky, za kterých byly předchozí informace získány, a vyhnout se pokušení uplatnit nedostatečně známá data, která by mohla vést k závažným chybám a k nedorozumění.

Příklad 10. Sledujme dále železobetonovou konstrukci popsanou v příkladu 9. Připomeňme, že z předchozích kontrolních zkoušek jsou známy původní (apriorní) pravděpodobnosti $p_1' = P(B_1) = 0,05$ (pravděpodobnost, že skutečná pevnost je nižší než charakteristická hodnota 20 MPa, což je jev B_1) a $p_2' = P(B_2) = 0,95$ (pravděpodobnost, že skutečná pevnost je vyšší než 20 MPa, jev B_2).

Při následném hodnocení konstrukce byly provedeny dodatečné zkoušky pevnosti betonu pomocí jádrových vrtů, jejichž přesnost je dostatečně vysoká (na rozdíl od nedestruktivních zkoušek v předchozím příkladu 9), a k nepřesnostem není tedy nutno při rozboru výsledků přihlížet. Tyto zkoušky naznačily, že věrohodnost jevu B_1 je $l_1 \propto P(A|B_1) = 0,2$ a věrohodnost jevu B_2 je $l_2 \propto P(A|B_2) = 0,8$ (uvedené věrohodnosti jsou již normalizovány). Aktualizované (aposteriorní) pravděpodobnosti plynou ze vztahu (25)

$$p_1'' = \frac{p_1' l_1}{\sum_{j=1}^2 p_j' l_j} = \frac{0,05 * 0,20}{0,05 * 0,20 + 0,95 * 0,80} = 0,01$$

$$p_2'' = \frac{p_2' l_2}{\sum_{j=1}^2 p_j' l_j} = \frac{0,95 * 0,80}{0,05 * 0,20 + 0,95 * 0,80} = 0,99$$

Aktualizované (aposteriorní) rozdělení pravděpodobností p_i'' je tedy příznivější než původní (apriorní) rozdělení pravděpodobností p_i' .

Poznamenejme, že pokud dodatečné zkoušky naznačí, že věrohodnosti obou jevů B_1 a B_2 jsou stejné, např. $l_1 = P(A|B_1) = l_2 = P(A|B_2) = 0,5$, jsou aktualizované pravděpodobnosti stejné jako původní ($p_i'' = p_i'$). Jestliže by však rozbor jevu A ukázal, že věrohodnost jevu B_1 je vyšší než jevu B_2 , např. $l_1 \propto P(A|B_1) = 0,7$ a $l_2 \propto P(A|B_2) = 0,3$, aposteriorní pravděpodobnosti se výrazně změní:

$$p_1'' = \frac{p_1' l_1}{\sum_{j=1}^2 p_j' l_j} = \frac{0,05 * 0,70}{0,05 * 0,70 + 0,95 * 0,30} = 0,11$$

$$p_2'' = \frac{p_2' l_2}{\sum_{j=1}^2 p_j' l_j} = \frac{0,95 * 0,30}{0,05 * 0,70 + 0,95 * 0,30} = 0,89$$

Aktualizované (aposteriorní) rozdělení pravděpodobností p_i'' je tedy zřetelně méně příznivé než původní (apriorní) rozdělení p_i' . Vliv původního (apriorního) rozdělení se zdá však stále převažující; vymizí pouze při extrémním rozdělení věrohodností, např. když se současně l_1 blíží k jedné ($l_1 \propto P(A|B_1) \rightarrow 1$) a l_2 blíží k nule ($l_2 \propto P(A|B_2) \rightarrow 0$). V praxi se však očekává spíše takové rozdělení věrohodností, které se svým tvarem přibližuje k apriornímu rozdělení pravděpodobností.

Příklad 11. Velké množství tažených prvků existující konstrukce bylo navrženo na zatížení 2 kN. Při přestavbě konstrukce se však zatížení těchto prvků má zvýšit na 2,5 kN. Předchozí zkušenosti ukazují, že prvky jsou schopny přenášet zatížení 2,5 kN (jev B) s pravděpodobností $p_1' = P(B) = 0,8$ a poruší se s pravděpodobností $p_2' = P(\bar{B}) = 0,2$. Navíc je však z předchozí zkušenosti známo, že polovina z těch prvků, které neprenesou zatížení 2,5 kN, vyhoví při nižším zatížení 2,3 kN (jev A). S ohledem na tyto poznatky lze pravděpodobnost $p_1' = P(B) = 0,8$ aktualizovat zkouškou jednoho prvku na zatížení 2,3 kN.

Předpokládejme, že zkouška byla úspěšná, tj. prvek se při zatížení 2,3 kN neporušil. Z výsledku této zkoušky byla odhadnuta věrohodnost jevu B , tj. $l_1 \propto P(A|B) = 1$, a jevu \bar{B} , tj. $l_2 \propto P(A|\bar{B}) = 0,5$. Ze vztahu (25) pak plyne aposteriorní pravděpodobnost

$$p_1'' = \frac{p_1' l_1}{\sum_{j=1}^2 p_j' l_j} = \frac{0,80 * 1,0}{0,80 * 1,0 + 0,20 * 0,5} = 0,89$$

Apriorní pravděpodobnost $p_1' = 0,8$ je tedy aktualizována hodnotou $p_1'' = 0,89$. Aktualizaci pravděpodobností lze však opakovat další zkouškou, při které se aposteriorní pravděpodobnost získaná v předchozím kroku považuje za apriorní informaci. Jestliže by další zkouška byla opět úspěšná, pak nová aposteriorní pravděpodobnost je

$$p_1'' = \frac{p_1' l_1}{\sum_{j=1}^2 p_j' l_j} = \frac{0,89 * 1,0}{0,89 * 1,0 + 0,11 * 0,5} = 0,94$$

Tento opakovaný postup je při aktualizaci pravděpodobností v praktických aplikacích obvyklý a zcela charakteristický.

Co se však stane, jestliže první zkouška není úspěšná? Pokud jsou v tomto případě odhadnuty věrohodnosti $l_1 \propto P(A|B) = 0,5$ a $l_2 \propto P(A|\bar{B}) = 1,0$ (opačný poměr než v případě úspěšné zkoušky), vychází pro aposteriorní pravděpodobnost p_1''

$$p_1'' = \frac{p_1' l_1}{\sum_{j=1}^2 p_j' l_j} = \frac{0,80 * 0,5}{0,80 * 0,5 + 0,20 * 1,0} = 0,67$$

což je nepříznivé snížení původní apriorní hodnoty $p_1' = 0,8$. S ohledem na tuto skutečnost je zřejmě nutné uvažovat o dalších zkouškách.

7 Kauzální síť

Věta o úplné pravděpodobnosti (23) a Bayesova věta (24) se účinně uplatňují při rozboru pravděpodobnosti náhodných jevů vzájemně propojených příčinnými vazbami [2], [3]. Schematické znázornění vzájemně propojených jevů se nazývá kauzální síť (někdy také příčinná nebo Bayesovská síť). Jednotlivé jevy propojené v síti se nazývají uzly nebo úplnější náhodné uzly.

Obrázek 6 ukazuje základní úlohu výpočtu pravděpodobností kauzálními sítěmi, kdy jeden náhodný uzel A (počet nehod v tunelu na jeden kilometr tunelu za rok) je závislý na dvou rodičovských uzlech B a C (intenzita dopravy a funkce dopravně informačního systému), jak naznačují kauzální vazby (šipky). Počet nehod v tunelech je sice závislý na mnoha faktorech, zde se pro ilustraci uvažují pouze dva důležité faktory: dopravní intenzita a funkce dopravně informačního systému.

Jestliže podle obrázku 6 náhodný uzel A závisí na dvou příčinných (rodičovských) uzlech B a C , je rozdělení pravděpodobností uzlu A dáno vztahem

$$P(A) = P(A|B,C) P(B) P(C) \quad (26)$$

ve kterém $P(A|B,C)$ označuje podmíněné pravděpodobnosti stavů uzlu A za předpokladu, že nastaly jednotlivé stavy uzlů B a C , $P(B)$ a $P(C)$ popisují rozdělení pravděpodobností rodičovských uzlů A v B .

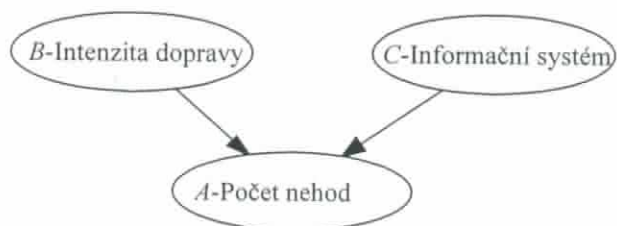
Zpravidla se předpokládá, že uzly A , B a C lze popsat konečným počtem diskrétních stavů, jejichž výskyt se popisuje určitým rozdělením pravděpodobností. Jestliže uzel B má

disjunktní stavy B_i a uzel C disjunktní stavy C_j , které jsou popsány pravděpodobnostmi $P(B_i)$ a $P(C_j)$, pak z věty o úplné pravděpodobnosti (23) platí pro rozdělení pravděpodobností $P(A)$ uzlu A vztah

$$P(A) = \sum P(A|B_i C_j) P(B_i) P(C_j) \quad (27)$$

kde sumace platí pro všechna i a j . Pravděpodobnosti $P(A|B_i C_j)$ se zpravidla popisují tabulkou podmíněné pravděpodobnosti (TPB).

Vztahy (26) a (27), popřípadě jejich zobecnění, se často uplatňují při vyhodnocení (kompilaci) kauzálních sítí. Další podrobnosti o výpočetních postupech je možno získat z dostupné odborné literatury.



Obrázek 6 Příklad uplatnění kauzální sítě pro výpočet pravděpodobností.

Příklad 12. Příklad ukazuje postup hodnocení rizik v tunelu na základě úrovně vybavení, intenzity dopravy a počtu nehod. Předpokládané stavy uzlů A , B , C a jejich vstupní pravděpodobnosti jsou patrné z následujících tabulek.

Tab. 1 Rozdělení pravděpodobností uzlů B a C .

Uzel B		Uzel C	
B_1 – Malá intenzita	0,70	C_1 – Funkční	0,90
B_2 – Velká intenzita	0,30	C_2 – Nefunkční	0,10

Tab. 2 Podmíněné pravděpodobnosti $P(A|B_i C_j)$.

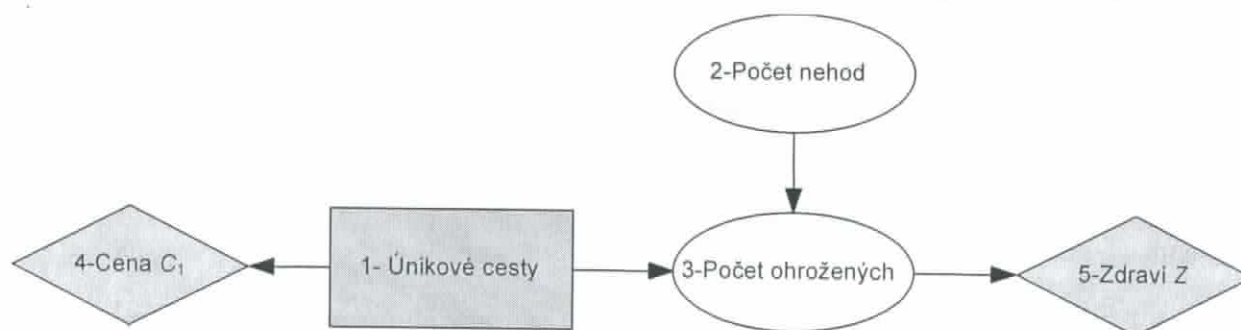
Uzel B_i	B_1 – Malá intenzita		B_2 – Velká intenzita	
	C_1 – Funkční	C_2 – Nefunkční	C_1 – Funkční	C_2 – Nefunkční
$P(A B_i C_j): A_1$ – 0 nehod	0,99	0,90	0,90	0,80
A_2 – 100 nehod	0,01	0,10	0,10	0,20

Prvním krokem je výpočet počtu nehod A_2 . Ze vztahu (2.27) plyne

$$\begin{aligned}
 P(A_2|B, C) &= P(A_2|B_1, C_1)P(B_1)P(C_1) + P(A_2|B_1, C_2)P(B_1)P(C_2) \\
 &\quad + P(A_2|B_2, C_1)P(B_2)P(C_1) + P(A_2|B_2, C_2)P(B_2)P(C_2) = \\
 &= 0,01 \times 0,70 \times 0,90 + 0,10 \times 0,70 \times 0,10 + 0,10 \times 0,30 \times 0,90 + 0,20 \times 0,30 \times 0,10 = \\
 &= 0,0063 + 0,0070 + 0,0270 + 0,0060 = 0,0463
 \end{aligned}$$

Očekávaný počet nehod na jeden kilometr tunelu za rok je tedy $0,0463 \times 100 = 4,63$ (tabulka 2 uvádí podmíněné pravděpodobnosti výskytu 100 nehod za jeden rok). Popsaný postup výpočtu pravděpodobností, kdy jeden uzel závisí na dvou rodičovských uzlech, není zpravidla u stromových diagramů možný. Kauzální (Bayesovské) sítě mají však další přednosti, které ukazují mnohé praktické aplikace, zčásti i následující příklad zaměřený rovněž na problematiku tunelů.

Obrázek 7 znázorňuje jednoduchou kauzální síť náhodných uzlů (někdy nazývaná užítková síť) doplněnou o jeden rozhodovací uzel a dva užítkové uzly, která zachycuje praktickou úlohu stanovení rizik u silničních tunelů. Cílem úlohy je získat podklady pro rozhodnutí o úrovni přístupových (obslužných) a únikových cest u nově navrhovaného silničního tunelu. Zjednodušená síť na obrázku 7 obsahuje pouze 5 uzlů. Jde tedy o velmi hrubou, zjednodušenou síť, která má pouze ilustrovat shora uvedené základní principy včetně stanovení vstupních hodnot. V konkrétních případech rozboru rizik v tunelu bude nepochybně nutné síť doplnit o další uzly (rozhodovací, náhodné i užítkové) a nové příčinné vazby.



Obrázek 7 Zjednodušený příklad sítě pro stanovení rizika poškození zdraví.

Rozhodovací uzel

1 - Únikové cesty. Uzel zachycuje rozhodnutí o úrovni přístupových a únikových cest. V příkladu se rozlišují čtyři stupně: výborný, velmi dobrý, dobrý a dostatečný. V konkrétních podmínkách je možno tyto stupně upřesnit a vyjádřit numericky na základě podrobného hodnocení tunelu.

Náhodné uzly

2 - Počet nehod. Uzel popisuje počet vážných nehod na jeden kilometr tunelu za rok. V příkladu se předpokládá, že u sledovaného tunelu dojde ke čtyřem nehodám za rok. Obvykle se předpokládá určitá frekvence vážných nehod na dopravní výkon tunelu, například 0,3 až 0,6 na 10^6 vozokilometrů. Je zřejmé, že počet nehod může obecně záviset na dalších faktorech, které se v uvažovaném příkladu neuvažují.

3 - Počet ohrožených osob. Náhodný uzel popisuje počet ohrožených osob v závislosti na rozhodnutí o úrovni únikových cest (uzel 1) a na počtu nehod (uzel 2). V příkladu se předpokládá rozdělení počtu ohrožených osob N_1 na jednu nehodu podle tabulky 3. Jde však pouze o informativní hodnoty, které je třeba ověřit s ohledem na charakter dopravy ve sledovaném tunelu.

Tabulka 3. Počet ohrožených osob N_1 při jedné nehodě v závislosti na rozhodnutí o únikových cestách (uzel 1) a počtu nehod (uzel 2).

1- Únikové cesty	Výborné	Velmi dobré	Dobré	Dostatečné
3- Počet osob N_1	1	2	4	8

Užitkové uzly

4 - Cena C_1 . Uzel popisuje cenu C_1 za vybudování únikových cest vyjádřenou v jednotkách poškození zdraví v závislosti na jejich úrovni (uzel 1) a přepočtenou na jeden kilometr tunelu a jeden rok životnosti tunelu. V příkladu se uvažují hodnoty podle tabulky 4, přičemž jednotkou ceny se uvažuje cena smrtelného úrazu.

Tabulka 4 Cena za vybudování únikových cest v závislosti na jejich úrovni (uzel 1) na jeden kilometr tunelu přepočtená na jeden rok životnosti tunelu.

1- Únikové cesty	Výborné	Velmi dobré	Dobré	Dostatečné
3-Cena 1, C_1	0,10	0,07	0,05	0,04

Jednotkou ceny přepočtené na jeden kilometr tunelu a jeden rok životnosti tunelu je cena jednoho smrtelného úrazu (lidského života). Tento předpoklad je citlivým krokem hodnocení rizik, který je zpravidla předmětem podrobné diskuse. Komplexní rozbor rizik tunelů se však tomuto vztahu sociálních a ekonomických následků rozhodujících a náhodných uzlů ztěží vyhne. Někdy se však rozbor rizik omezuje pouze na sociální rizika vyjádřená v jednotkách poškození zdraví.

5 - Poškození zdraví Z. Uzel zachycuje počet smrtelných úrazů v závislosti na počtu ohrožených osob (uzel 3). V příkladu se uvažuje, že na každých 200 vážně ohrožených osob dojde k jednomu smrtelnému úrazu, tedy podmíněná pravděpodobnost $P_f = 0,005$, že vážně ohrožená osoba podlehně svému zranění. Opět je zřejmé, že poškození zdraví může obecně záviset na dalších faktorech (vzniku požáru, požární bezpečnosti, větracím systému, technologickém vybavení), které se v příkladu neuvažují.

Rozbor sítě

Vyhodnocení sítě, tj. stanovení podmíněných pravděpodobností některých uzlů (proměnných) za předpokladu informací o jiných uzlech (proměnných) a stanovení rizik na základě vstupních dat pro užitkové uzly lze v uvažovaném příkladě určit bez využití jakéhokoli softwarového produktu. Například počet ohrožených osob popsany uzlem 3 je dán tabulkou podobnou tabulce 3, avšak s hodnotami vynásobenými předpokládaným počtem nehod 4, tedy s hodnotami 4, 8, 16 a 32, jak uvádí tabulka 5.

Tabulka 5 Výsledný počet ohrožených osob N za jeden rok v závislosti na úrovni únikových cest (uzel 1).

1- Únikové cesty	Výborné	Velmi dobré	Dobré	Dostatečné
Počet ohrožených N	4	8	16	32

Podobně lze rozdělení poškození zdraví popsané uzlem 5 odvodit z tabulky 2.3 vynásobením počtem nehod 4 a pravděpodobností $P_f = 0,005$ odpovídající předpokládané frekvenci smrtelných úrazů pro uzel 5 (1 na 200 vážně ohrožených osob). Hodnoty v tabulce 3 se tedy vynásobí celkovým faktorem 0,02. Výsledné hodnoty sociálních rizik v závislosti na rozhodnutí o úrovni únikových cest jsou tedy 0,02, 0,04, 0,08 a 0,16, jak uvádí tabulka 6. Stejně výsledky lze získat s použitím programu Hugin.

Tabulka 6 Výsledná rizika Z za jeden rok v závislosti na úrovni únikových cest (uzel 1).

1- Únikové cesty	Výborné	Velmi dobré	Dobré	Dostatečné
Poškození zdraví Z	0,02	0,04	0,08	0,16

Celkové náklady R (součet nákladů C_1 a rizika Z) jsou vyjádřeny vztahem

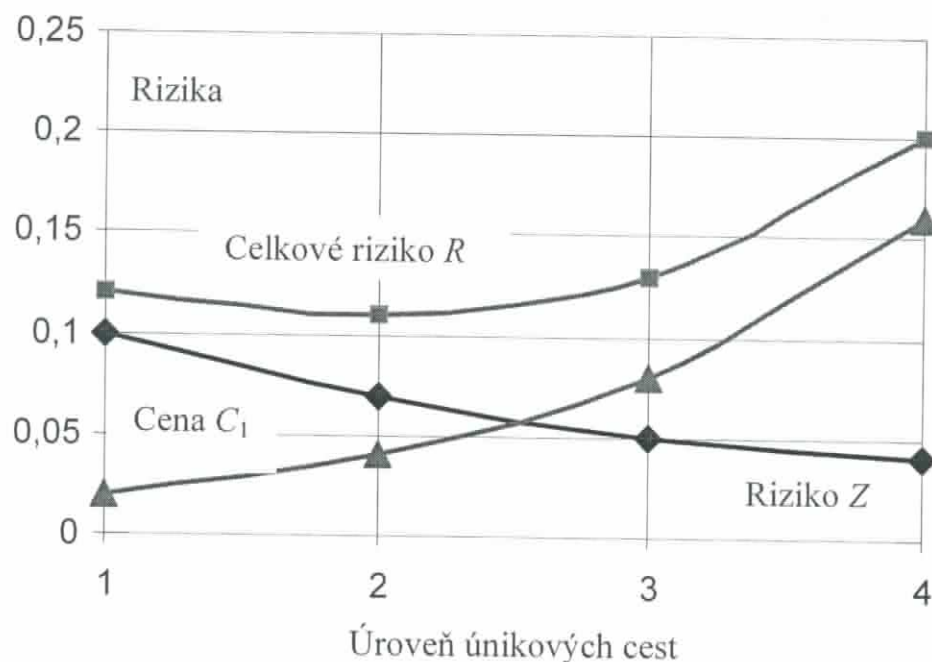
$$R = C_1 + Z = C_1 + P_f N \quad (28)$$

Celkové náklady R jsou zachyceny v tabulce 7, jejíž hodnoty jsou vlastně prostým součtem příslušných hodnot v tabulce 4 a 6.

Tabulka 7 Výsledná rizika R za jeden rok v závislosti na úrovni únikových cest (uzel 1).

1- Únikové cesty	Výborné	Velmi dobré	Dobré	Dostatečné
Výsledná rizika R	0,12	0,11	0,13	0,20

Výsledky rozboru sítě (tabulky 4, 6 a 7) jsou graficky zachyceny na obrázku 8, který ukazuje závislost jednotlivých složek celkových nákladů na rozhodnutí o úrovni únikových cest. Jde o jednoduchou ukázkou optimalizace celkových nákladů stanovených podle rovnice (28).



Obr. 8 Rizika v závislosti na rozhodnutí o úrovni únikových cest.

V obecném případě však takto jednoduchý výpočetní postup není možný, a pak je zpravidla účelné využít dostupné softwarové produkty.

Závěrečná poznámka

Z tabulky 7 a z obrázku 8 je patrná závislost celkových nákladů (riziko kombinované s odpovídajícími náklady) na rozhodnutí o úrovni únikových cest. Ukazuje se, že minimální celkové náklady nastanou, jestliže se zvolí úroveň únikových cest 2 (velmi dobrá), ne tedy úroveň 1 (výborná), jak se očekávalo. Tento poznatek nelze však zobecňovat; je závislý na zvolených vstupních datech příkladu, který má ilustrativní charakter, a jehož účelem je především ukázat možnosti užitkové sítě při hodnocení rizik.

Jednoduchý příklad zachycený na obrázku 8 je však možno řešit i jiným způsobem, například s využitím stromkových diagramů. Předností užitkové sítě (kauzální sítě doplněné o rozhodovací a užitkové uzly) je větší obecnost a přehlednost.

Uznání. Tato studie je dílčím výsledkem řešení úkolu GAČR 103/06/1562.

Literatura

- [1] M. Holický M. a Marková J., Základy teorie spolehlivosti a hodnocení rizik. Vydavatelství ČVUT, 2005.
- [2] Holický M., Risk Assessment in Advanced Engineering Design, Acta Polytechnica Vol 43, No. 3/2003.
- [3] Holický M. & Šajtar L., 2006 Probabilistic Risk Assessment and Optimization of Road Tunnels', Advances in Safety and Reliability, ESREL 2006, Taylor & Francis Group, London, 2006, pp. 2065-2071.

Příloha – softwarové pomůcky

1 Update.mcd, list programu MATHCAD pro aktualizaci apriorních pravděpodobností na základě nově získaných dat.

2 Update.xls, list programu EXCEL pro aktualizaci apriorních pravděpodobností na základě nově získaných dat.

1 Update.mcd, list programu MATHCAD

"Update.mcd" is MATHCAD sheet for probability updating
 Probability updating using formula

$$p_i'' = \frac{p_i' l_i}{\sum_j p_j' l_j}$$

where p' denotes apriory probabilities, l likelihoods and p'' aposteriori probabilities

1. Reading data for apriory probabilities and likelihoods from file

DATA := READPRN("Update.prn")

Check vaue

p := DATA<0>

l := DATA<1>

n := length(p)

n = 2

2 Updated probabilities p''_i

$$pp := \frac{(p \cdot l)}{p \cdot l}$$

$$pp = \begin{pmatrix} 0.889 \\ 0.111 \end{pmatrix}$$

3. Alternative introduction of input data directly

Aprior probabilities p'_i

p := (0.8 0.2 0 0 0 0 0 0 0 0)^T

Likelihoods l_i

l := (1. 0.5 1 1 1 1 1 1 1 1)^T

4 Updated probabilities p''_i

$$pp := \frac{(p \cdot l)}{p \cdot l}$$

5. Listing of the updated probabilities

	0
0	0.889
1	0.111
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0

pp₀ = 0.889

pp₁ = 0.111

2 Update.xls, list programu EXCEL

Updating of probabilities using Bayesian formula				
$P(B_i A) = \frac{P(B_i) P(A B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j) P(A B_j)}$				
$\text{or } p_i'' = \frac{p_i' l_i}{\sum_j p_j' l_j}$				
Event	Prior	Likelihood	Product	Updated
i	p'	l	p' * l	p''
1	0.8	1	0.8	0.8889
2	0.2	0.5	0.1	0.1111
2	0	1	0	0.0000
3	0	1	0	0.0000
4	0	1	0	0.0000
5	0	1	0	0.0000
6	0	1	0	0.0000
7	0	1	0	0.0000
8	0	1	0	0.0000
9	0	1	0	0.0000
10	0	1	0	0.0000
Sum	1	10.5	0.9	1
Check	OK			OK

Aktualizace pravděpodobností na základě Bayesovy věty

Prof. Ing. Milan Holický, DrSc.
Kloknerův ústav ČVUT

Interpretace pravděpodobnosti
Bayesova věta
Aktualizace pravděpodobnosti
Aktualizace rozdělení
Bayesovské sítě

1

Reverend Thomas Bayes, 1702 až 1761

- The *probability of any event* is the ratio between the value at which an expectation depending on the happening of the event ought to be computed, and the chance of the thing expected upon it's happening. (Degree of belief).



Thomas Bayes (1763) An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances.

Bayesova Essay and I. Kant

- Thomas Bayes (1763), "An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances. By the late Rev. Mr. Bayes, F. R. S. communicated by Mr. Price, in a letter to John Canton, A. M. F. R. S.", *Philosophical Transactions, Giving Some Account of the Present Undertakings, Studies and Labours of the Ingenious in Many Considerable Parts of the World* 53:370–418.
- Immanuel Kant (1724-1804) „Kritika čistého rozumu“, filosofické základy poznání jako kombinace smyslovosti a rozumu (apriorní názory o jevech).

3

Interpretace pojmu pravděpodobnost

- **Fyzikální** (objektivní) pravděpodobnost – navazuje na klasičnou definici pravděpodobnosti jako relativní frekvence, přirozený trend, že jev nastane (logická pravděpodobnost).
- **Bayesovská** (subjektivní) pravděpodobnost - míra přesvědčení (věrohodnosti) s jakou dostupné informace podporují určitý výrok nebo uskutečnění určitého jevu.

4

Nejistoty (ve stavebnictví)

- Náhodnosti (aleatoric uncertainties)
 - Přirozená proměnlivost
- Noetické nejistoty (epistémické nejistoty - epistemic uncertainty)
 - Statistické nejistoty
 - Modelové nejistoty
 - Neurčitosti, vágnosti
 - Nedostatečné znalosti

5

Vhodnost pravděpodobnostní interpretace nejistot

Interpretace pravděpodobnosti	Nejistoty	
	Náhodnosti	Noetické nejistoty
Fyzikální	Dobré	Malé
Bayesovská	Dobré	Vynikající

6

Definice pravděpodobnosti

Probability is one of the most important concepts in modern science – especially as nobody has slightest notion of what it means.

Bertrand Russell, 1929



- Náhodné jevy A, B , jistý U , nemožný V
- Soubor podmínek π náhodných pokusů
- Klasická definice pravděpodobnosti:

$$P(A) = n(A)/n(U)$$

- Axiomatická definice: $P(A)$ je funkce
 $P(A_i) \geq 0, P(U) = 1, P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$



Andrey Nikolaevich Kolmogorov, 1933

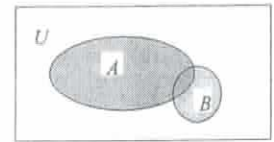
7

Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$$

Pro disjunktní jevy

$$A \cap B = V, \text{ pak } P(A|B) = 0$$



je-li $A \subset B$, pak $P(A|B) = P(A) / P(B)$

Je-li $B \subset A$, pak $P(A|B) = 1$ (A je dokonale záv. na B)

Nezávislé jevy $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Pak $A \cap B \neq V$ and $A \not\subset B$ and $B \not\subset A$

8

Bayesova věta

- Pravděpodobnost průniku – an intersection
 $P(A \cap B) = P(A) P(B|A) = P(A|B) P(B)$
- Bayesova věta – a problem of inverse probability



Reverend Thomas Bayes
1702 - 1761

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\text{apriorní} \cdot \text{věrohodnost}}{\text{aktualizovaná}} = \frac{P(B) \times P(A|B)}{P(A)} \cdot \text{opravný faktor}$$



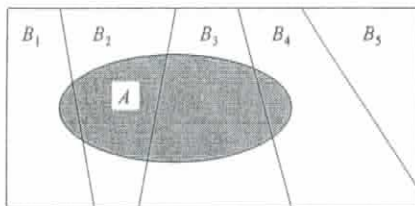
Immanuel Kant, 1724 - 1804

Pravděpodobnost vadného výrobku

- Apriorní pravděpodobnost vadného výrobku $P(B) = 0,05$
- Výsledek testu A ukázal, že výrobek je vadný
 $P(A|B) = 0,9$
- Věrohodnost popisuje přesnost měření
 $P(A|\text{non}B) = 0,05$
- Pravděpodobnost pozitivního testu A
 $P(A) = P(B) P(A|B) + P(\text{non}B) P(A|\text{non}B) =$
 $= 0,05 \times 0,9 + 0,95 \times 0,05 = 0,045 + 0,0475 = 0,0925$
- Aktualizovaná pravděpodobnost, že výrobek je vadný
 $P(B|A) = P(B) P(A|B) / P(A) = 0,05 \times 0,9 / 0,0925 = 0,486$

10

Věta o úplné pravděpodobnosti



$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) P(A|B_i)$$

An example: Failure F under permanent B_1 and fire design situation B_2
 B_1 permanent design situation B_2 accidental design situation

$$P(F) = P(B_1)P(F|B_1) + P(B_2)P(F|B_2) = 0,99 \times 0,00001 + 0,01 \times 0,001 \approx 0,00002$$

Věta o úplné pravděpodobnosti a Bayesova věta

Věta o úplné pravděpodobnosti (B_i disjunktní)

$$P(A) = \sum P(B_i) P(A|B_i)$$

Bayesova věta (B_i disjunktní)

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)} = \frac{\text{apriorní} \cdot \text{věrohodnost}}{\sum \text{opravný faktor}} = \frac{P(B_j) P(A|B_j)}{\sum P(B_i) P(A|B_i)}$$

12

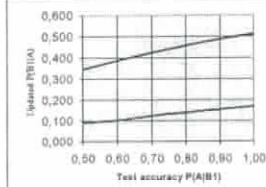
Aktualizace alternativní veličiny

B_1 - defective, B_2 - conforming

Updating calculation		The test result A - defective		The test result non A - conforming	
Event	Prior	Likelihood	Product	Updated	Product
i	$p^i = P(B_i)$	$l^i = P(A B_i)$	$p^i \cdot l^i$	$p^{i*} = P(B_i A)$	$p^{i*} \cdot \text{non } l^i = P(B_i \text{non}A)$
1	0,050	0,900	0,045	0,486	0,100
2	0,950	0,050	0,048	0,514	0,900
Sum	1,000	$P(A) = 0,093$	1,000	$P(\text{non}A) = 0,908$	1,000
Check	OK		OK		OK

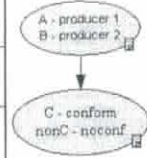
Example

Probability $P(A B_1)$	Prior $P(B_1)$	Prior $P(B_2)$
0,50	0,05	0,95
0,60	0,345	0,655
0,70	0,387	0,613
0,80	0,424	0,576
0,90	0,457	0,543
0,95	0,487	0,513
1,00	0,500	0,500



Dva výrobci

	A: Producer 1 $P(A) = 0,6$	B: Producer 2 $P(B) = 0,4$
C Conforming	$P(C A) = 0,95$	$P(C B) = 0,9$
nonC Non-conf.	$P(\text{non}C A) = 0,05$	$P(\text{non}C B) = 0,1$



Software GeNie

Probability of non-conforming product
 $P(\text{non}C) = P(A) P(\text{non}C|A) + P(B) P(\text{non}C|B) = 0,6 \times 0,05 + 0,4 \times 0,1 = 0,07$

Probability that a non-conforming product is supplied by A or B

$$P(A|\text{non}C) = P(A) P(\text{non}C|A) / P(\text{non}C) = 0,6 \times 0,05 / 0,07 = 0,43$$

$$P(B|\text{non}C) = P(B) P(\text{non}C|B) / P(\text{non}C) = 0,4 \times 0,1 / 0,07 = 0,57$$

Aktualizace pevnosti betonu

An old reinforced concrete bridge is reassessed. Three classes of the concrete are foreseen: B_1 , $f_c < 30$, B_2 , $30 \leq f_c < 40$, B_3 , $40 \leq f_c$ (in MPa). Prior probabilities $P(B_i)$ are based on previous experience with similar bridges, likelihood $P(A|B_i)$ is assessed from an additional experiment, $f_c = 36$ MPa (class B_2), allowing for certain chance that the actual strength corresponds to the lower class B_1 or upper class B_3 ,

Class	Strength f_c [MPa]	Prior probabilities $P(B_i)$	Likelihood $P(A B_i)$	Posterior prob. $P(B_i A)$
1	$f_c < 30$	0,65	0,46	0,50
2	$30 \leq f_c < 40$	0,24	1,00	0,40
3	$40 \leq f_c$	0,11	0,54	0,10

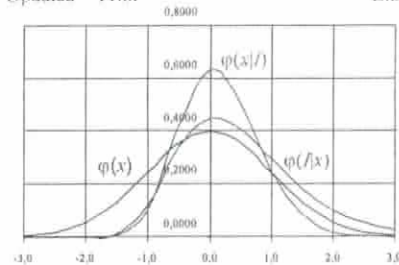
$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{\sum_{i=1}^3 P(B_i)P(A|B_i)} = \frac{0,24 \times 1,00}{0,65 \times 0,46 + 0,24 \times 1,00 + 0,11 \times 0,54} = 0,40$$

15

Aktualizace hustoty pravděpodobnosti

$$\varphi(x|I) = \frac{\varphi(x)\varphi(I|x)}{\int \varphi(x)\varphi(I|x)dx}$$

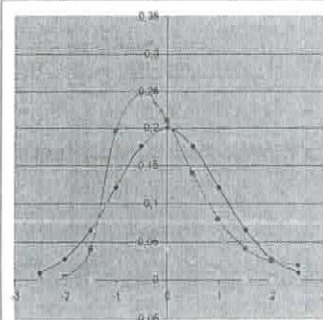
Updated Prior Likelihood



16

Pomůcka v Excelu

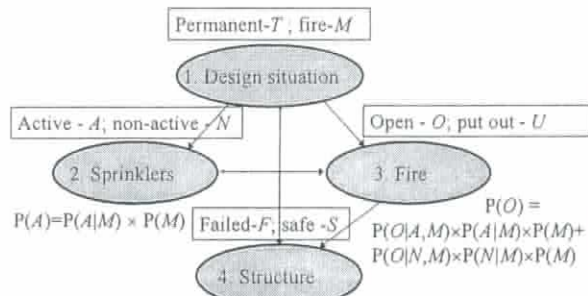
Event	Prior	Likelihood	Product	Updated
i	p^i	l^i	$p^i \cdot l^i$	p^{i*}



	0,0000
	0,0007
	0,0174
	0,1585
	0,2905
	0,2806
	0,1646
	0,0647
	0,0174
	0,0045
	0,0011
	1
	OK

17

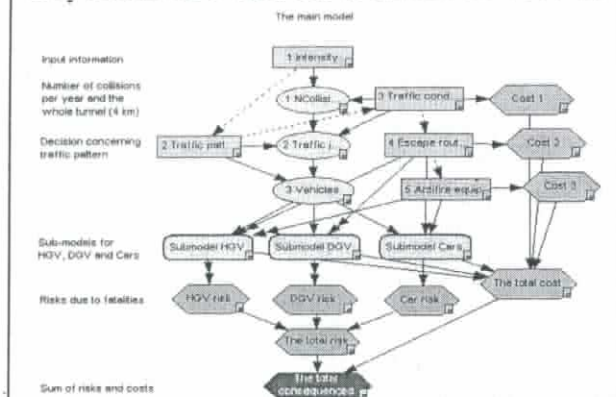
A structure under fire situation



$$P(F) = P(F|T) \times P(T) + P(F|O, M) \times P(O|M) \times P(M) + P(F|U, M) \times P(U|M) \times P(M)$$

Bayesian network: softwares HUGIN, GeNie

Bayesian network for a tunnel of 4000 m



Závěrečné poznámky

- Fyzikální a Bayesovská interpretace pravděpodobnosti se uplatňují při popisu náhodnosti a jiných nejistot
- Bayesova věta a příčinné sítě se uplatňují v řadě technických i netechnických oborech
- Využití předchozích zkušeností může vést ke snížení počtu potřebných zkoušek a nákladů
- Apriorní informace nebo jejich použití mohou být nesprávné a mohou vést k chybným závěrům
- Klienti mohou zpochybnit apriorní informace nebo inženýrský úsudek
- Neexistuje žádný jednoznačný způsob, jak zacházet s apriorními informacemi
- Předpoklady i výsledky mohou být subjektivní



Bayesův hrob v Moorgate, London 20

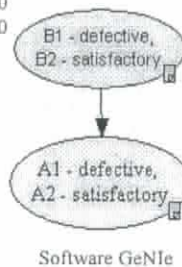
Přejímka měření

Předpokládaná (apriorní) jakost: $P(B_1) = 0,10$
 $P(B_2) = 0,90$

Accuracy of measurements A_1 :
 $P(A_1|B_1) = 0,85$, $P(A_1|B_2) = 0,05$,
 $P(A_2|B_1) = 0,15$, $P(A_2|B_2) = 0,95$

Pravděpodobnost výsledku měření A_1 a A_2
 $P(A_1) = P(A_1|B_1)P(B_1) + P(A_1|B_2)P(B_2) = 0,85 \times 0,10 + 0,05 \times 0,90 = 0,13$
 $P(A_2) = P(A_2|B_1)P(B_1) + P(A_2|B_2)P(B_2) = 0,15 \times 0,10 + 0,95 \times 0,90 = 0,87$

Je-li výsledek měření A_2 (evidence) pak z Bayesovy věty:
 $P(B_1|A_2) = 0,05 \times 0,10 / (0,05 \times 0,10 + 0,95 \times 0,90) = 0,0058$
 $P(B_2|A_2) = 0,95 \times 0,90 / (0,05 \times 0,10 + 0,95 \times 0,90) = 0,9942$



Software GeNIe

21

EXCEL
sheet
strength
updating

Updating concrete strength using Bayesian formula
 B_i denotes strength class, A an additional experiment

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_j P(B_j)P(A|B_j)} \quad p_j^* = \frac{p_j^* l_j}{\sum_j p_j^* l_j}$$

Class	Input data fields		Output data fields	
	Prior $p^* = P(B_i)$	Likelihood $l = P(A B_i)$	Product $p^* \cdot l$	Updated
i				
1	0,65	0,46	0,299	0,4997
2	0,24	1,00	0,24	0,4011
3	0,11	0,54	0,0594	0,0993
4	0	0	0	0,0000
5	0	0	0	0,0000
Sum	1	2	0,5984	1
Check	OK			OK

Aktualizace pravděpodobnosti

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)} \quad p_j^* = \frac{p_j^* l_j}{\sum_i p_i^* l_i}$$

$P(B_j) = p_j^*$ apriorní, $P(A|B_j) = l_j$

$P(B_j|A) = p_j^*$ aposteriorní

Příklad:

$$p_1^* = \frac{p_1^* l_1}{\sum_{i=1}^2 p_i^* l_i} = \frac{0,05 \times 0,20}{0,05 \times 0,20 + 0,95 \times 0,80} = 0,01$$

$$p_2^* = \frac{p_2^* l_2}{\sum_{i=1}^2 p_i^* l_i} = \frac{0,95 \times 0,80}{0,05 \times 0,20 + 0,95 \times 0,80} = 0,99$$

23

Pravděpodobnost vzniku rakoviny

Probabilities (x100) of Developing Cancer in New York

Males - 1987-1991

Current

Develop Cancer by Age

Age	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	85+
0	0,15	0,23	0,31	0,42	0,60	0,87	1,24	1,77	2,57	3,91	6,27	10,11	14,08	21,96	33,13	41,53	47,86	52,93
5		0,08	0,15	0,27	0,45	0,73	1,10	1,64	2,44	3,80	6,19	10,09	14,12	21,10	31,39	41,88	48,29	52,43
10			0,08	0,19	0,37	0,65	1,03	1,56	2,37	3,73	6,12	10,02	14,07	21,06	31,37	41,86	48,27	52,41
15				0,11	0,30	0,58	0,95	1,49	2,30	3,66	6,06	9,96	14,02	21,03	31,35	41,85	48,26	52,40
20					0,18	0,46	0,84	1,36	2,19	3,56	5,97	9,89	15,98	24,03	33,39	41,90	48,31	52,45
25						0,28	0,66	1,21	2,03	3,40	5,83	9,78	15,91	24,03	33,45	42,06	48,58	52,65
30							0,38	0,83	1,76	3,15	5,60	9,58	15,77	23,95	33,46	42,17	48,73	52,89
35								0,55	1,38	2,80	5,27	9,30	15,56	23,85	33,45	42,35	48,89	54,20
40									0,95	2,38	4,78	8,89	15,24	23,63	33,40	42,34	48,98	54,48
45										1,46	4,02	8,20	14,68	23,25	33,22	42,34	49,22	54,75
50											2,44	6,95	13,63	22,46	32,74	42,34	49,23	54,91
55												4,51	11,54	20,82	31,61	41,49	49,98	54,91
60													7,62	13,61	23,41	40,14	49,22	54,70
65														11,58	25,85	37,38	46,68	54,13
70															14,10	32,36	44,01	53,35
75																22,40	39,27	52,80
80																	39,40	54,78
85+																		63,34

24

Bayesův přístup pro demonstraci spolehlivosti vysoce spolehlivých prvků

Doc. Ing. Radim Briš, CSc.

VŠB-TU Ostrava, Fakulta elektrotechniky a informatiky,

Katedra aplikované matematiky

Úvod

Dnešní výrobci musí čelit stále rostoucí a intenzivní globální soutěživosti. Ve snaze být ziskovými musí věnovat stále větší pozornost směrem ke zkrácení cyklu: návrh – vývoj – zkoušení – výroba, to vše při rostoucí spolehlivosti svých výrobků a limitovaných nákladech. Výrobní a spolehlivostní inženýři vyvinuli řadu efektivních nástrojů pro výrobu spolehlivých výrobků. Avšak s ohledem na zdokonalování výrobních technologií a s ohledem na tržní prostředí vyvstává potřeba pro generaci nových metod pro odhad, testování a demonstraci spolehlivosti výrobků.

Rychlý vývoj vyspělých technologií a rostoucí složitost výrobků společně s vysokými nároky zákazníků tvoří v dnešní době tlak na výrobce vyrábět vysoce spolehlivé výrobky. Zákazníci očekávají, že zakoupené výrobky jsou spolehlivé a bezpečné. Systémy, stroje, součástky, atd. by měly být schopny s vysokou pravděpodobností plnit předepsanou funkci v předpokládaných provozních podmínkách během nějakého specifikovaného času. Programy pro zlepšení spolehlivosti vyžadují kvantitativní metody pro predikci a odhad různých aspektů výrobní spolehlivosti. Efektivní a včasný sběr potřebných dat vyžaduje pečlivé naplánování. To zahrnuje sběr spolehlivostních dat pocházejících z mnoha činností jako je:

- laboratorní zkoušky životnosti
- degradační zkoušky materiálů, součástek a komponent
- navrhované experimenty pro zlepšení spolehlivosti
- prototypové zkoušky za účelem zjištění druhů poruch
- pečlivé monitorování prvních výrobků v provozu
- analýza dat o záručních dobách
- systematické dlouhodobé sledování výrobků v provozu

Spolehlivost jako míra kvality se velmi obtížně monitoruje a řídí, může být přímo odhadnuta pouze poté, co výrobek prošel dlouhodobým provozem. V důsledku toho jsou identifikace a náprava příčin spolehlivostních problémů velmi obtížné. Predikce nebo nepřímo

změřená spolehlivost na základě obvyklých laboratorních zkoušek mají tendenci být vysoce nepřesnými.

Oproti potřebě zkoušet a testovat ve stále větším rozsahu s cílem dosáhnout vyšší jakosti a spolehlivosti existuje dnes extrémní tlak směřující ke snížení časového intervalu od vzniku nové koncepce výrobku k jeho produkci. Tento tlak má za následek snahu o redukci objemu času pro testování spolehlivosti ve všech stádiích výrobního procesu, což zvyšuje riziko přehlédnutí potenciálních a na první pohled skrytých spolehlivostních problémů. Výsledkem těchto trendů je následující závěr: zkoušet méně a přitom umět lépe číst v zaznamenaných datech. Konkrétně to znamená zdokonalení, případně generaci nové metodiky pro jednak plánování spolehlivostních testů a jednak jejich vyhodnocení.

Tento příspěvek si klade za cíl přispět k překonání těžkostí, ať už časových či ekonomických, spojených s monitorováním spolehlivosti vysoce spolehlivých výrobků. Cílem je představit využití Bayesova přístupu v otázce demonstrace spolehlivosti vysoce spolehlivých výrobků, jejíž řešení sehraává v dnešní době významnou úlohu v dodavatelsko odběratelských vztazích. Bayesův přístup je zde představen jako moderní a flexibilní matematický aparát, který je rozšířen a aplikován na konkrétní praktické problémy: transformace dat o spolehlivosti do aktuálních podmínek, stanovení výběrového plánu při zadaných požadavcích na spolehlivost, kalkulace rizika odběratele při známé disperzi spolehlivostní veličiny.

Demonstrace spolehlivosti vysoce spolehlivých výrobků

Problém ověření specifikované spolehlivostní hladiny sestává z určení obsahu a druhu zkoušky, která musí být provedena, aby demonstrovala jistou spolehlivostní úroveň se specifikovanou jistotou.

Výrobce vysoce spolehlivých prvků (jako jsou např. elektronické součástky) musí mnohdy vynakládat nemalé prostředky na to, aby přesvědčil zákazníka o kvalitě svého výrobku, navíc samotné testování je velmi zdlouhavé. Jedna z možností, jak snížit tyto náklady a přitom zkrátit zkoušení, je použít zrychlené zkoušky životnosti. Transformace dat ze zrychlených do normálních podmínek je však mnohdy doprovázena značnou nepřesností spočívající v odhadu faktoru zrychlení.

Bayesův přístup dává možnost nejen upřesnit tento odhad užitím aktuálních dat výrobce, ale poskytuje i optimalizaci plánu zkoušení s ohledem na zvolená kritéria.

V dalším budeme předpokládat, že vyšetřované vysoce spolehlivé výrobky jsou v ustálené periodě svého života, tedy že dobu do poruchy lze modelovat exponenciálním modelem s konstantní intenzitou poruch.

Klasický postup pro demonstraci intenzity poruch

Budeme uvažovat takový případ, kdy je fixována kumulativní doba zkoušení T a doby do poruchy jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny (doby oprav jsou ignorovány). Díky vztahu mezi exponenciálně rozdělenými dobami do poruch a díky aditivní vlastnosti homogenního Poissonova procesu, kumulovaná doba zkoušení může být rozdělena libovolným způsobem, jako např.:

1. Zkoušení jednoho výrobku, který je obnoven bezprostředně po každé poruše (doba obnovy = 0), tedy $T = t =$ kalendářní čas.
2. Zkoušení m identických výrobků, z nichž každý je obnoven bezprostředně po poruše; zde bude $T = m \cdot t$ $m = 1, 2, \dots$

V případě konstantní intenzity poruch je proces poruch homogenní Poissonův proces s intenzitou λ v průběhu celého (fixovaného) časového intervalu $\langle 0, T \rangle$. Odtud vyplývá, že pravděpodobnost výskytu k poruch v průběhu doby zkoušení T je dána

$$\Pr \{k \text{ poruch během } T \mid \lambda\} = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T},$$

Statistické procedury pro demonstraci λ mohou tedy být založeny na statistickém ocenění parametru $m = \lambda T$ Poissonova rozdělení.

Obecně je vyžadován test pro přijetí v kontextu s prokázáním nějaké hodnoty λ_0 . Hlavním účelem tohoto testu je ověření nulové hypotézy $H_0: \lambda < \lambda_0$ oproti alternativní hypotéze $H_1: \lambda > \lambda_1$ na základě následující dohody mezi výrobcem a odběratelem:

Výrobky by měly být akceptovány s pravděpodobností blízkou (ale ne menší než) $1 - \alpha$ pokud skutečná (neznámá) λ je menší než λ_0 , avšak zamítnuty s pravděpodobností blízkou (ale ne menší než) $1 - \beta$, pokud λ je větší než λ_1 ($\lambda_0 < \lambda_1$ jsou dané fixní hodnoty).

λ_0 je specifikovaná ověřovaná hodnota λ a λ_1 je minimální akceptovatelná hodnota λ . α je riziko výrobce (chyba I. druhu), tj. pravděpodobnost zamítnutí pravdivé hypotézy H_0 . β je odpovídající riziko odběratele (chyba II. druhu), tj. pravděpodobnost přijetí hypotézy H_0 ačkoliv je pravdivá H_1 . V následujícím bude implicitně předpokládáno, že $0 < \alpha < 1 - \beta < 1$. Zhodnocení výše uvedené dohody je problémem testování statistických hypotéz a může být

provedeno jednoduchým dvoustranným testem, kde kumulativní doba zkoušení T a počet přípustných poruch r během T jsou fixní veličiny. Tato procedura vypadá následovně:

1. Ze zadaných $\lambda_0, \lambda_1, \alpha$ a β určíme nejmenší celé číslo r a hodnotu T tak, aby

$$\sum_{i=0}^r \frac{(\lambda_0 T)^i}{i!} e^{-\lambda_0 T} \geq 1 - \alpha$$

a

$$\sum_{i=0}^r \frac{(\lambda_1 T)^i}{i!} e^{-\lambda_1 T} \leq \beta$$

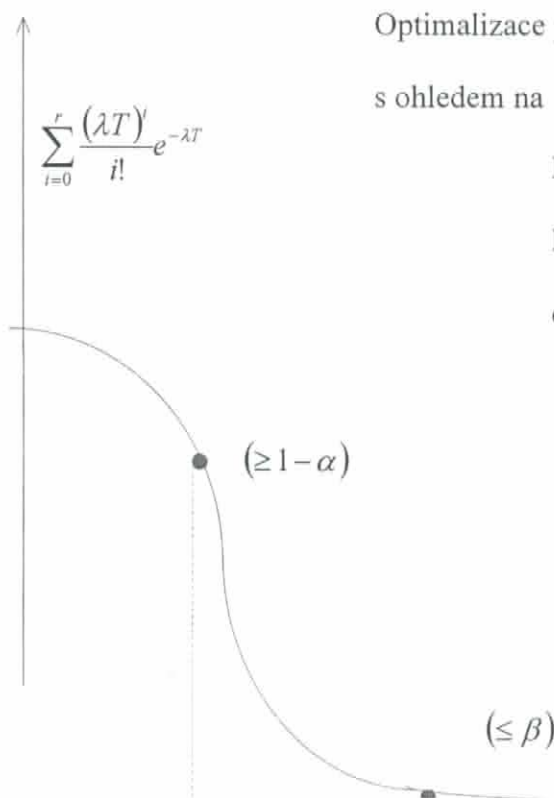
2. Provedeme test s kumulativní dobou zkoušení T určíme počet poruch během testu k a

- zamítneme $H_0: \lambda < \lambda_0$ pokud $k > r$
- nezamítneme $H_0: \lambda < \lambda_0$ pokud $k \leq r$

Nerovnosti z bodu 1. se mnohdy znázorňují formou tzv. *operativní charakteristiky*. Tato křivka pro každou hodnotu λ vyjadřuje pravděpodobnost, že se nevyskytne více než r poruch během kumulativní doby zkoušení T . Protože operativní charakteristika jako funkce λ je monotónně klesající, riziko chybného rozhodnutí klesá pro $\lambda < \lambda_0$ eventuelně pro $\lambda > \lambda_1$.

Pro $\alpha = \beta$ sdílí výrobce a odběratel stejné riziko chybného rozhodnutí. V praktických aplikacích jsou užívány pouze jednostranné testy, tj. jsou dány pouze λ_0 a α , resp. pouze λ_1 a β . V těchto případech při malých hodnotách r může dojít k nežádoucímu zvýhodnění výrobce, resp. odběratele.

Operativní charakteristika jako funkce λ pro pevná T a r



Optimalizace plánů zkoušení pro demonstraci λ_0
s ohledem na daná rizika výrobce či odběratele

$$H_0: \lambda < \lambda_0$$

$$H_1: \lambda > \lambda_1$$

$$\text{dáno } \alpha, \beta \Rightarrow T, r$$

Bayesův přístup pro demonstraci spolehlivosti vysoce spolehlivých výrobků

Vysoce spolehlivé výrobky (např. elektronické součástky) mají běžně intenzitu poruch v oblasti 0,1 až 100 Fit (1 Fit = 10^{-9} poruch / hod.) v normálních provozních podmínkách. Pokud je takovýto výrobek v náběhové etapě výroby, kdy provozní data ještě nejsou k dispozici, je prokázání takto nízkých hodnot intenzity poruch nesmírně obtížné. Aplikace klasické procedury z předchozího odstavce by vyžadovala kumulovanou dobu zkoušení T řádově desítky až stovky tisíc hodin a to i při malých hodnotách r . Použití zrychlených zkoušek je tedy nevyhnutelné a je vysvětleno a diskutováno v řadě literárních zdrojů [2].

Bayesův přístup v aplikaci na zrychlené zkoušky byl poprvé představen autorem v publikaci [1]. Hlavním charakteristickým rysem tohoto pohledu je použití Bayesova přístupu, který je aplikován v několika rovinách:

- v oblasti řešení klíčové otázky zrychlených zkoušek, odhadu faktoru zrychlení
- v oblasti diskutované demonstrace spolehlivosti, tj. stanovení výběrového plánu zkoušení s ohledem na uspokojení požadavků odběratele
- v oblasti kalkulace a optimalizace rizika spojeného se zvoleným výběrovým plánem zkoušení.

Předností Bayesova přístupu je zejména možnost efektivního využití zdánlivě nepotřebných spolehlivostních dat (apriorní inženýrská zkušenost), nahromaděných výrobcem v před-výrobních etapách (např. z prototypových zkoušek, ze zkoušek technologicky příbuzných prvků apod.)

ZNAČENÍ, PŘEDPOKLADY, MOTIVACE, NÁVAZNOST, CÍL

ZDS	– zkouška demonstrující spolehlivost
ZZS	– zrychlená zkouška spolehlivosti
ES	– elektronická součástka
MVO	– odhad získaný metodou maximální věrohodnosti
[eV]	- elektronvolt, jednotka aktivační energie
<i>Pdf</i>	– funkce hustoty pravděpodobnosti (probability density function)

λ_2	– intenzita poruch ve zrychlených podmínkách ($i=2$)
I	– index pro podmínky dané teplotou zrychlení; $i = 1, 2$
λ_1	intenzita poruch v daných podmínkách ($i=1$)
$t_{i,j}$	– doba poruchy neb odzkoušený čas pro prvek j v podmínkách i ; $i=1,2$
$t_i = \sum_{j=1}^{n_i} t_{i,j}$	– kumulovaná doba zkoušení n_i prvků v podmínkách i , během níž se vyskytne r_i poruch
(t_i, r_i)	– parametry výběrového plánu zkoušení v podmínkách i
δ^*	– aposteriorní riziko
$1-\delta^*$	– aposteriorní jistota odběratele
$E \{ \lambda \mid \text{data} \}$	– podmíněná očekávaná hodnota λ
$\text{Var} \{ \lambda \mid \text{data} \}$	– podmíněný rozptyl λ
Fit	– 10^{-9} poruch / hod.

Jako motivace pro generaci předkládané metodiky posloužila následující běžná situace z praxe výrobce ES. Blíže nespecifikovaný odběratel chce nakoupit velký objem konkrétní ES za podmínky, že splňuje náročná spolehlivostní kritéria (konkrétní λ_1): Časové i finanční náklady na zkoušení, spojené s garancí λ_1 však vysoce převyšují možnosti výrobce. Klasické řešení tohoto problému spočívá v užití zrychlených zkoušek. Pokud faktor zrychlení mezi zrychlenými a zadanými podmínkami je A pak postačí provést transformaci spolehlivostního požadavku λ_1 na λ_2 podle vztahu $\lambda_2 = A \cdot \lambda_1$ a stanovit podmínky pro zkoušení λ_2 ve zrychlených podmínkách. Hlavní problém nyní spočívá v přesném určení faktoru A . Je samozřejmé, že existuje mnoho metod pro určení tohoto faktoru a mohli bychom použít kteroukoliv z nich za předpokladu, že máme k dispozici k tomu nezbytná data. Nelson v [2] poskytuje vyčerpávající přehled teorie a praxe zrychlených zkoušek.

Bayesův přístup poskytuje alternativní postup pro stanovení A. Umožňuje integrovat vhodnou apriorní informaci o faktoru A a dále ji modifikovat běžnými spolehlivostními daty nashromážděnými výrobcem během předvýrobních etap. Toho lze docílit za předpokladu, že faktor zrychlení považujeme za náhodnou veličinu, jejíž nejistotu lze modelovat vhodně zvolenou apriorní hustotou pravděpodobnosti, sestavenou na základě apriorní inženýrské informace o technologii zkoumaného prvku. Pro analytický tvar faktoru zrychlení budeme předpokládat Arrheniův spolehlivostní model, který předznamenává zrychlení teplotou.

Bayesův přístup však umožňuje nejen estimaci aktuální hodnoty faktoru zrychlení A při daném typu výrobní technologie, ale i stanovení a optimalizaci takového výběrového plánu, který bere v úvahu dva druhy spolehlivostních požadavků odběratele, formulovaných jako následující Situace 1 a Situace 2.

Situace 1: Stanovit výběrový plán zkoušení tak, aby $\lambda_1 \leq \lambda_0$ kde λ_0 je zadaná hladina spolehlivosti.

Situace 2: Stanovit výběrový plán zkoušení tak, aby $Pr(\lambda_1 \leq \lambda_0) \geq 1 - \alpha$ kde α je nějaké zadané malé číslo.

Bude odvozena aposteriorní hustota pravděpodobnosti pro λ_2 , která je funkcí výběrového plánu ve zrychlených podmínkách. Tato skutečnost ve svém důsledku umožňuje optimalizovat režim pro zkoušení spolehlivosti užitím takových kritérií, jako je

$Var\{\lambda \mid \text{data}\}, E\{\lambda \mid \text{data}\}$, kvantily λ apod.

Dále bude odvozeno aposteriorní riziko odběratele δ^* vycházející z následující definice, která je v souladu s [3]:

$$\delta^* = Pr(\lambda_1 \geq \lambda_0 \mid \text{ZDS vyhovuje})$$

K vyčíslení rizika δ^* je nezbytné odvodit podmíněné rozdělení $pdf(r_2 \mid t_2)$, které je Poissonova typu při daných předpokladech. Nové poznatky jsou podpořeny numerickými výpočty s programem Matlab. Použitá data pocházejí z praktických zkoušek někdejšího výrobce ES.

APRIORNÍ A APOSTERIORNÍ ROZDĚLENÍ PRO A, Λ_1 A Λ_2

Uvažujme následující základní problém. Výrobce ES produkuje součástky s nízkou konstantní intenzitou poruch λ_1 . Předpokládejme, že v daných provozních podmínkách bylo odzkoušeno již mnoho výběrů daného typu výrobku s celkovou kumulovanou dobou zkoušení

$t_1 > 0$, během níž se vyskytlo r_1 poruch. Předpokládejme dále, že ve zrychlených podmínkách byl odzkoušen náhodný výběr pocházející z téže populace výrobků; po kumulované době t_2 se vyskytlo r_2 poruch, z čehož lze snadno získat odhad intenzity poruch λ_2 ve zrychlených podmínkách. Necht'

$$A = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

označuje poměr těchto dvou intenzit poruch. Budeme se nyní zajímat o statistickou indukci vzhledem k faktoru A popřípadě λ_1, λ_2 . Klasická analýza tohoto problému může být provedena použitím metody maximální věrohodnosti, modifikované pro cenzorované náhodné výběry. Pro naznačenou testovací situaci má věrohodnostní (resp. logaritmická věrohodnostní) funkce tvar:

$$L(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^{r_1} e^{-\lambda_1 t_1} \lambda_2^{r_2} e^{-\lambda_2 t_2}$$

$$\text{resp. } \ln L(\lambda_1, \lambda_2) = -\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 + r_1 \ln \lambda_1 + r_2 \ln \lambda_2$$

Metoda maximální věrohodnosti dává estimátory pro λ_1, λ_2 , které jsou nezávislé vzhledem ke statistické nezávislosti spolehlivostních zkoušek v provozních a zrychlených podmínkách.

Tato analýza však nebere ohled na apriorní informaci, spočívající například v tom, že známe analytický tvar pro faktor A (s ohledem na podmínky zkoušení) – ten bývá pro teplotní zrychlení prakticky výhradně modelován Arrheniovým modelem. Často také bývá t_1 výrazně odlišné od t_2 , jelikož výrobce má zpravidla mnohem větší zkušenosti s výrobkem provozovaným v provozních podmínkách. Tedy klasická indukce poskytuje dosti neefektivní způsob, jak využít nepřímou empirickou výpověď o faktoru A , která je dostupná z četných informací, získaných v provozních podmínkách.

Výše uvedená logaritmická věrohodnostní funkce naznačuje použití tzv. přirozeného konjugovaného systému pro λ_1 a λ_2 . Avšak ten není dostatečně flexibilní pro praktické použití. Mimo jiné například proto, že nedokáže správně modelovat případ, kdy apriorní informace o individuálních hodnotách λ_1, λ_2 je vágní a přitom je známa nějaká informace o faktoru A dostupná z porovnání inženýrských charakteristik uvažovaného výrobku od různých výrobců.

Odvodíme, jak zvolit přirozený konjugovaný systém takový, aby umožnil zároveň podchytit apriorní informaci o poměru $A = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Vyjdeme-li z tvaru pro věrohodnostní funkci L výše, můžeme jej formálně přepsat na tvar

$$L_{\lambda} = \lambda_1^{r_1+r_2} e^{-\lambda_1(t_1+At_2)} \cdot A^{r_2}$$

Chceme-li získat z této věrohodnostní funkce pouze experimentální výpověď o poměru A je nutno tuto funkci v jistém smyslu "vystředovat" přes λ_1 . Pokud v nejobecnějším případě budeme předpokládat pro λ_1 neurčité apriorní rozdělení, dostáváme věrohodnostní funkci ve tvaru

$$\begin{aligned} L_A &= \int_0^{\infty} L_{\lambda} \frac{1}{\lambda_1} d\lambda_1 = A^{r_2} \int_0^{\infty} \lambda_1^{r_1+r_2-1} e^{-\lambda_1(t_1+At_2)} d\lambda_1 = A^{r_2} \frac{(r_1+r_2-1)!}{(t_1+At_2)^{r_1+r_2}} \\ &\propto \frac{A^{r_2}}{\left(1+A\frac{t_2}{t_1}\right)^{r_1+r_2}} \end{aligned}$$

Tento tvar je zajímavý tím, že závisí na t_1 a t_2 pouze prostřednictvím poměru $h = \frac{t_2}{t_1}$.

Máme-li nyní kombinovat empirické informace jak o individuálních λ_1 (resp. λ_2) – viz tvar pro L_{λ} tak o poměru A – viz tvar L_A obdržíme konjugovaný tvar pro sdružené apriorní rozdělení pravděpodobnosti λ_1 a A (odpovídající součinu $L_{\lambda} \cdot L_A$):

$$pdf(\lambda_1, A) \propto \lambda_1^c \exp(-a\lambda_1 - bA\lambda_1) \frac{A^f}{(1+hA)^g}$$

kde a, b, c, f, g, h jsou parametry. Pro marginální rozdělení λ_1, λ_2, A lze pak snadno odvodit následující výrazy:

$$pdf(\lambda_1) \propto \lambda_1^c \exp(-a\lambda_1) \int_0^{\infty} \frac{u^f}{(1+hu)^g} \exp(-b\lambda_1 u) du$$

$$pdf(\lambda_2) \propto \lambda_2^c \exp(-b\lambda_2) \int_0^{\infty} \frac{u^{c+g-f-1}}{(h+u)^g} \exp(-a\lambda_2 u) du$$

$$pdf(A) \propto \frac{A^f}{(1+hA)^g \left(1 + \frac{b}{a}A\right)^{c+1}}$$

Sdružená apriorní hustota tvoří přirozený konjugovaný systém pro výběrový experiment popsaný věrohodnostní funkcí $L(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^{r_1} e^{-\lambda_1 t_1} \lambda_2^{r_2} e^{-\lambda_2 t_2}$. V první fázi experimentu, kdy přichází informace v podobě kumulované doby t_1 a počtu poruch r_1 , se toto apriorní rozdělení transformuje na aposteriorní, které je téhož tvaru, avšak s pozměněnými parametry:

$$a' = a + t_1, \quad b' = b, \quad c' = c + r_1, \quad f' = f, \quad g' = g, \quad h' = h$$

V druhé fázi experimentu, kdy přichází informace v podobě t_2, r_2 , bude mít aposteriorní rozdělení tentýž tvar avšak s následujícími hodnotami parametrů:

$$a'' = a + t_1, \quad b'' = b + t_2, \quad c'' = c + r_1 + r_2, \quad f'' = f + r_2, \quad g'' = g, \quad h'' = h$$

Nicméně obecný tvar sdružené hustoty výše lze zdůvodnit i na základě jednodušší úvahy. Sdružená hustota se totiž dá také obecně zapsat jako součin podmíněné a marginální hustoty:

$$pdf(\lambda_1, A) = pdf(\lambda_1 | A) \cdot pdf(A)$$

Vydeme-li při procesu určování λ_1, λ_2 z přirozených konjugovaných systémů, pak hustota $pdf(A)$ se dá analyticky snadno odvodit jako rozdělení podílu dvou náhodných veličin s gamma rozdělením, což přesně odpovídá zlomku ve výrazu pro sdružené apriorní rozdělení pravděpodobnosti $pdf(\lambda_1, A)$. Zbývá část pravé strany v tomto výrazu odpovídá podmíněnému rozdělení $pdf(\lambda_1 | A)$, které má podle předpokladu tvar Gamma rozdělení.

DETERMINACE FAKTORU ZRYCHLENÍ

Z teorie je známo, že Bayesovým estimátorem nějakého neznámého parametru je aposteriorní očekávaná hodnota při uvažované kvadratické ztrátové funkci. Bayesův estimátor faktoru zrychlení tedy dostaneme z následující rovnice:

$$A^* = \int_A A \cdot pdf(A) dA$$

kde $pdf(A)$ je aposteriorní rozdělení faktoru zrychlení A ,

Určit aposteriorní rozdělení pro A znamená nalézt vhodné parametry apriorního rozdělení ve výrazu pro marginální hustotu A a ty posléze aktualizovat empirickou zkušeností.

Budeme-li předpokládat pro faktor zrychlení Arrheniův model, pak přiřazení parametrů na základě inženýrské zkušenosti lze provést následovně. Pokud nemáme předběžnou empirickou výpověď o spolehlivosti v provozních a zrychlených podmínkách, volíme tzv. neurčité apriorní rozdělení, tedy

$$pdf(\lambda_i) \propto \frac{1}{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \text{ což odpovídá následující volbě parametrů: } a, b, c: a=b=0, c = -$$

1.

Kromě toho je požadavek $b=0$ ekvivalentní požadavku, že λ_i, A jsou statisticky nezávislé, což je viditelné z výrazu pro $pdf(\lambda_i, A)$. Z výrazu pro marginální rozdělení $pdf(A)$ vyplývá, že inženýrskou zkušenost vzhledem k faktoru A lze zachytit pomocí tří parametrů: f, g, h a to i v takovém případě, kdy nemáme žádnou apriorní informaci o jednotlivých intenzitách poruch λ_1, λ_2 .

Arrheniův spolehlivostní model specifikuje vztah mezi faktorem zrychlení A a teplotním zatížením:

$$A = \exp\left[\frac{E_a}{k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right],$$

kde E_a je aktivační energie, k je Boltzmannova konstanta a T_1, T_2 jsou absolutní teploty v provozních a zrychlených podmínkách. Nejkritičtější parametrem, který se velmi těžko zjišťuje přesně, je aktivační energie. Různé poruchové mechanismy mají různé aktivační energie a dokonce se tento parametr může lišit pro stejný poruchový mechanismus součástka od součástky. V praxi se tento problém řeší tak, že pro účely transformace se bere jakási průměrná hodnota E_a . V mnoha případech je jeden poruchový mechanismus dominantní a vliv ostatních mechanismů na spolehlivost dané ES může být vyjádřena tak, jakoby aktivační energie byla náhodná veličina. Pokud dominantní mechanismus je ovlivňován mnoha slabšími mechanismy či faktory, lze předpokládat, že E_a bude vykazovat normální rozdělení, které je, jak známo, symetrické. Tato inženýrsko-fyzikální informace je konzistentní s následujícím vztahem mezi parametry g, f :

$$g = 2(f + 1),$$

čímž jsme redukovali počet neznámých parametrů na dva. Jednoduše lze dále ukázat, že modus náhodné veličiny $Y = \ln A$, jejíž hustota je

$$pdf(y) \propto \frac{e^{y(f+1)}}{(1 + h \cdot e^y)^g},$$

je roven $-\ln h$ při uvážení jednoduché podmínky výše mezi g a f , takže pokud použijeme jakousi nejpravděpodobnější hodnotu aktivační energie E_a^0 vycházející ze znalosti technologie výroby, pak dostáváme parametr h z následujícího vztahu:

$$h = \exp\left[-\frac{E_a^0}{k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right].$$

Výrobce má zpravidla k dispozici řadu empirických údajů o své technologii výroby, ale také o analogické technologii jiných výrobců téhož výrobku. Na základě těchto údajů je obvykle schopen stanovit meze, v nichž se pohybuje aktivační energie s vysokou pravděpodobností. Například je schopen kvantifikovat následující pravděpodobnost

$$\Pr\{E_a \in \langle E_1, E_2 \rangle\} = 0.95 \quad (*)$$

Odtud již lze získat pomocí vhodné numerické metody vyčíslení parametrů g, f .

Příklad

Pro ilustraci předchozí metody použijeme následující data od nespécifikovaného výrobce ES:

teplota $T_1 = 70^\circ\text{C}$: $t_1 = 7.247 \times 10^6$ hodin, $r_1 = 1$;

teplota $T_2 = 125^\circ\text{C}$: $t_2 = 10^7$ hodin, $r_2 = 3$.

Z velkého množství údajů, nahromaděných o použité technologii výroby lze kupříkladu dále vyčíst, že

$$\langle E_1, E_2 \rangle = \langle 0.5, 1.5 \rangle [eV] \quad E_a^0 = 0.96 [eV]$$

Hustotu pravděpodobnosti E_a lze nalézt transformací faktoru A na E_a z rovnice pro Arrheniův spolehlivostní model, kde pro A uvažujeme marginální apriorní rozdělení $pdf(A)$. Podmínka (*) může být posléze vyjádřena následující rovnicí pro g :

$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{E_0(g)}{k_T} \frac{\exp(\frac{gx}{2k_T})}{[1 + h \exp(\frac{x}{k_T})]^g} dx = 0.95$$

kde

$$k_T = \frac{k}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}} \quad [E_0(g)]^{-1} = \int_1^{\infty} \frac{x^{\frac{g}{2}-1}}{(1+hx)^g} dx$$

Numerickým výpočtem v programovém prostředí Matlab lze určit následující apriorní rozdělení pro faktor A

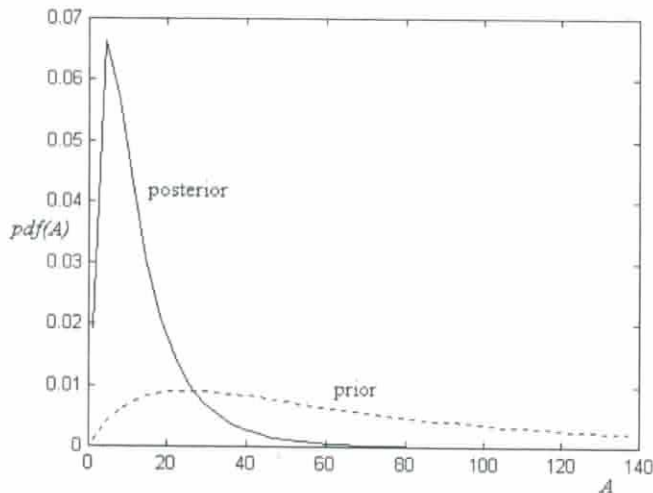
$$pdf(A) \propto \frac{A^f}{(1+hA)^g}, \quad kde$$

$$f = 1.1063, g = 4.2126, h = 0.01435$$

Aposteriorní očekávaná hodnota je pak rovna:

$$A^* = \int_A A \cdot pdf(A) dA = 13.0918,$$

viz následující obrázek:



Apriorní a aposteriorní rozdělení pro faktor A

Výběrový plán pro zkoušení spolehlivosti, Situace 1

Situace 1 je definována požadavkem odběratele, aby dodané výrobky splňovaly následující požadavek: $\lambda_1 \leq \lambda_0$

Otázka zní, jak sestavit plán zkoušení pro ověření tohoto spolehlivostního limitu a jaké je riziko odběratele.

Je známo, že MVO pro λ_1 při časovém cenzorování je dán: $\hat{\lambda} = \frac{r_1}{t_1}$

Pro vysoce spolehlivé prvky vychází kumulovaná doba zkoušení t_1 nereálně velká, byť bychom sestavili plán pro jeden přípustný vadný prvek. V souladu s dostupným vybavením tedy provedeme spolehlivostní test (ZDS) ve zrychlených podmínkách, kde výsledkem bude MVO pro λ_2

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{r_2}{t_2}$$

Avšak $\lambda_2 = A^* \lambda_1$, přičemž $\lambda_1 \leq \lambda_0$ takže máme podmínku pro t_2, r_2 :

$$\frac{r_2}{t_2} \leq A^* \lambda_0 \quad (i)$$

Předpokládejme, že jsou k dispozici četné informace z provozních podmínek, tj. známe t_1, r_1 . Dále známe marginální apriorní rozdělení pro $pdf(\lambda_2)$, které lze modifikovat na základě dostupné informace následující změnou parametrů: $a' = a + t_1, c' = c + r_1$. Za této situace můžeme optimalizovat výběrový plán (t_2, r_2) tak, aby splnění podmínky (i) bylo doprovázeno a doplněno ještě dalšími požadavky, které lze deklarovat s ohledem na statistickou povahu λ_2 , jako jsou např. jisté mezní hodnoty číselných charakteristik $E\{\lambda_2 | \text{data}\}$, $\text{Var}\{\lambda_2 | \text{data}\}$ medián $\{\lambda_2 | \text{data}\}$, či jiné kvantily λ_2 . Kromě toho můžeme předpovídat pravděpodobnosti možných výsledků pro různé hodnoty t_2, r_2 . Rozdělení pro předpověď r_2 může být totiž odvozeno z hodnoty $pdf(\lambda_2)$ a z podmíněného pravděpodobnostního rozdělení $pdf(r_2 | \lambda_2, t_2)$, které je při daných předpokladech Poissonovo s očekávanou hodnotou $\lambda_2 t_2$:

$$pdf(r_2 / t_2) = \int_{\lambda_2} pdf(r_2 | \lambda_2, t_2) pdf(\lambda_2) d\lambda_2,$$

$$\text{kde } pdf(r_2 | \lambda_2, t_2) = \frac{e^{-\lambda_2 t_2}}{r_2!} (\lambda_2 t_2)^{r_2}$$

Po úpravě lze vyjádřit

$$pdf(r_2 | t_2) = \frac{t_1}{t_2} \frac{1}{\int_0^{\infty} \frac{x^f}{(h+x)^{2(f+1)}} dx} \int_0^{\infty} \frac{x^{f+1} dx}{(h+x)^{2(f+1)} \left(1 + \frac{t_1}{t_2} x\right)^{r_2+1}}$$

Toto rozdělení lze účelně využít při výpočtu *aposteriorního rizika odběratele*, které definujeme následovně:

$$\delta^* = \Pr \{ \lambda_1 \geq \lambda_0 | \text{ZDS vyhovuje} \}$$

Doplňk této pravděpodobnosti do jedničky $1-\delta^*$ pak můžeme považovat za aposteriorní jistotu výrobce, že $\lambda_1 \leq \lambda_0$ v případě vyhovující ZDS.

Výpočet aposteriorního rizika odběratele

Necht' $(t_2, r_2 = k)$ je výběrový plán pro ZDS ve zrychlených podmínkách.

Potom

$$\delta^* = \frac{\sum_{i=0}^k \Pr\{(\lambda_2 \geq A^* \lambda_0) \cap (r_2 = i)\}}{\sum_{i=0}^k \Pr\{r_2 = i\}}$$

Důkaz: viz [1]

Příklad

Předpokládejme, že odběratel vysoce spolehlivého výrobku stanoví spolehlivostní požadavek ve tvaru

$$\lambda_1 \leq 100 \text{ Fit}$$

Výrobce musí v krátké době provést ZDS a pro tento účel potřebuje optimální výběrový plán ve zrychlených podmínkách. Předpokládejme, že výrobce má dlouhodobou zkušenost s testováním daného výrobku (dlouhodobě nashromážděná data z prototypových, kvalifikačních zkoušek, apod.): $t_1 = 7.247 \times 10^6$ [hod.], $r_1 = 1$, $A^* = 12.09$

Potom podmínku pro optimální plán dostaneme v následující podobě:

$$\frac{r_2}{t_2} \leq A^* \lambda_0 = 13.09 \times 10^{-7}$$

Následující tabulka 1 přináší možné výběrové plány pro ZDS, které vyhovují této podmínce, navíc obsahuje vybrané číselné charakteristiky $E\{\lambda_2/t_2, r_2\}$, $Var\{\lambda_2/t_2, r_2\}$, $Med\{\lambda_2/t_2, r_2\}$ a 90% kvantil λ_2 .

Výběrový plán	t_2 [10 ⁶ hodin]	r_2	$E\{\lambda_2/t_2, r_2\}$ [Fit]	$Var\{\lambda_2/t_2, r_2\}$ [10 ⁻⁷] $\sqrt{Var\{\lambda_2/t_2, r_2\}}$ [10 ⁻⁷]	$Med\{\lambda_2/t_2, r_2\}$ [Fit]	90% kvantil λ_2 [Fit]
P_1	2.3		1430	5.26 7.25	1309	2420
P_2	1.53		1480	7.6 8.7	1309	2560
P_3	0.76		1600	13.5 11.6	1330	3130
P_4	5.0		1270	2.3 4.8	1211	1914

Tabulka 1: Výběrové plány pro demonstraci spolehlivosti v Situaci 1

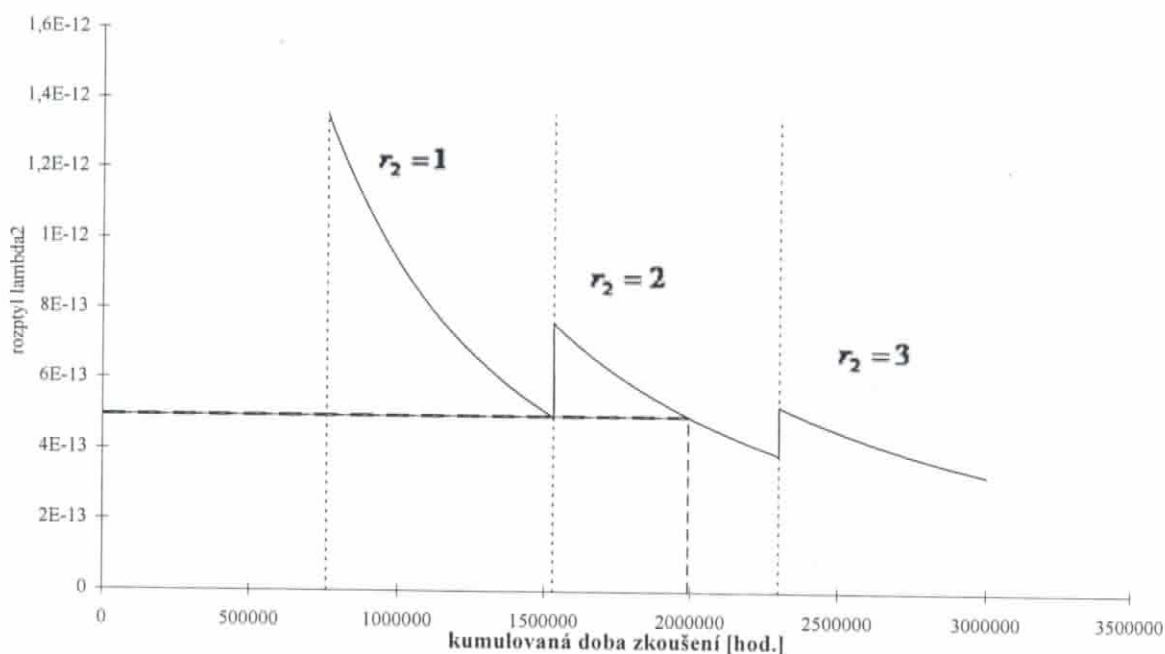
Ještě připomeňme, že výběrový plán pro ZDS ve zrychlených podmínkách je dán kumulovanou dobou zkoušení t_2 a maximálně přípustným počtem vadných prvků r_2 . Tabulka 2 prezentuje numerické hodnoty $pdf(r_2 | t_2)$, které potřebujeme pro výpočet aposteriorního rizika odběratele δ^* .

r_2 t_2 [10 ⁶]	0	1	2	3	4	5	6
0.76	0.39 68	0.2303	0.1398	0.0866	0.0542	0.0341	0.0215
1.53	0.25 18	0.1799	0.1331	0.1003	0.0764	0.0586	0.0451
2.3	0.18 58	0.1443	0.1153	0.0936	0.0768	0.0634	0.0526
5.0	0.09	0.0847	0.0745	0.0663	0.0593	0.0534	0.0483

Tabulka 2: Podmíněné rozdělení $pdf(r_2 | t_2)$

Proces optimalizace výběrového plánu je schematicky znázorněn na následujícím obrázku, který úzce koresponduje s výsledky v tabulce 1:

Obrázek - optimalizace výběrového plánu v Situaci 1



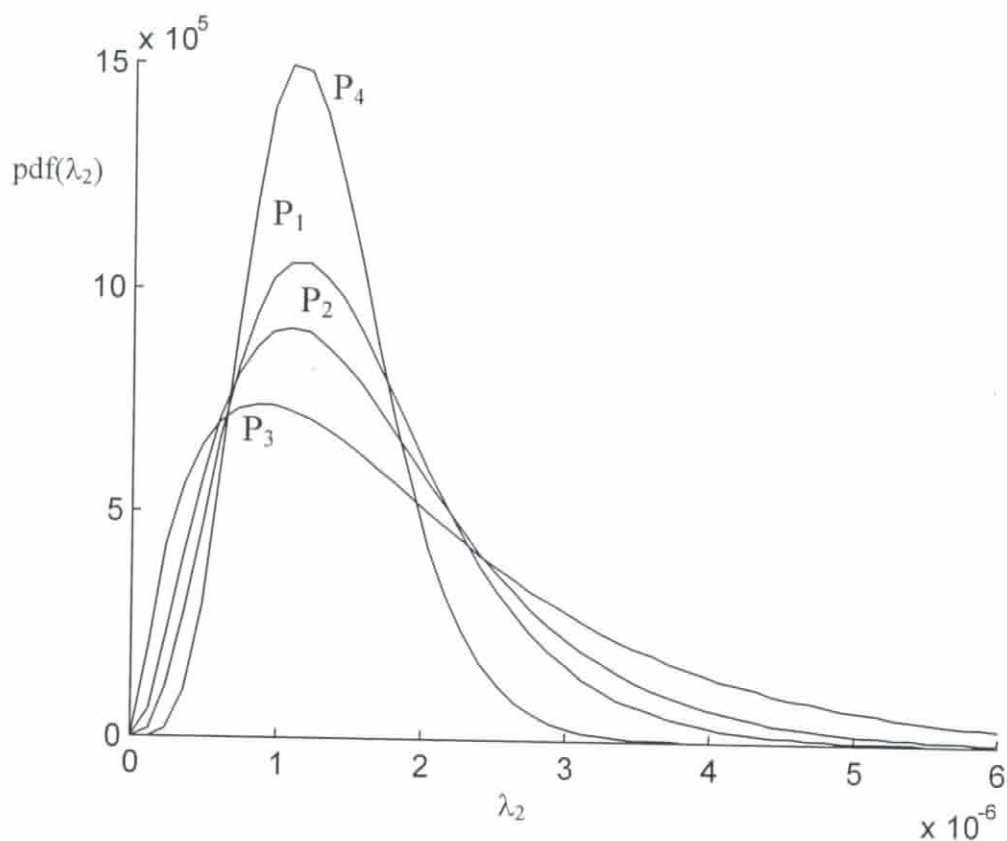
Je-li omezujícím kritériem pro λ_2 rozptyl velikosti 7.6×10^{-13} , pak ZDS je dána jako:

$$(t_2, r_2) = (1.53 \times 10^6 [\text{hod.}], 2)$$

Pokud je ovšem odzkoušena kumulovaná doba $2 \times 10^6 [\text{hod.}]$, lze snížit disperzi na hodnotu 5×10^{-13} (při $r_2 = 2$). Pokud je však ZDS dimenzována na $r_2 = 1$, disperze nabývá této snížené hodnoty i při původní kumulované době zkoušení $t_2 = 1.53 \times 10^6 [\text{hod.}]$. Tabulka 1 vypovídá, že statistické charakteristiky pro plány P_1 a P_2 jsou blízké, přitom doba zkoušení pro P_1 je příliš velká a tudíž těžko splnitelná. Extrémní výběrové plány P_3 a P_4 byly vypočteny pro účely porovnání. Velká disperze u P_3 a nereálná doba zkoušení u P_4 by vedly pravděpodobně k zamítnutí těchto plánů zkoušení.

Jako optimální při kritériu „rozumné“ disperze a zároveň z hlediska uskutečnitelnosti v reálném prostředí výrobce (tj. ne příliš dlouhá doba zkoušení t_2 se jeví plán P_2 .

Následující obrázek znázorňuje aposteriorní hustoty pravděpodobnosti $pdf(\lambda_2)$ pro všechny diskutované plány P_1, P_2, P_3 a P_4 .

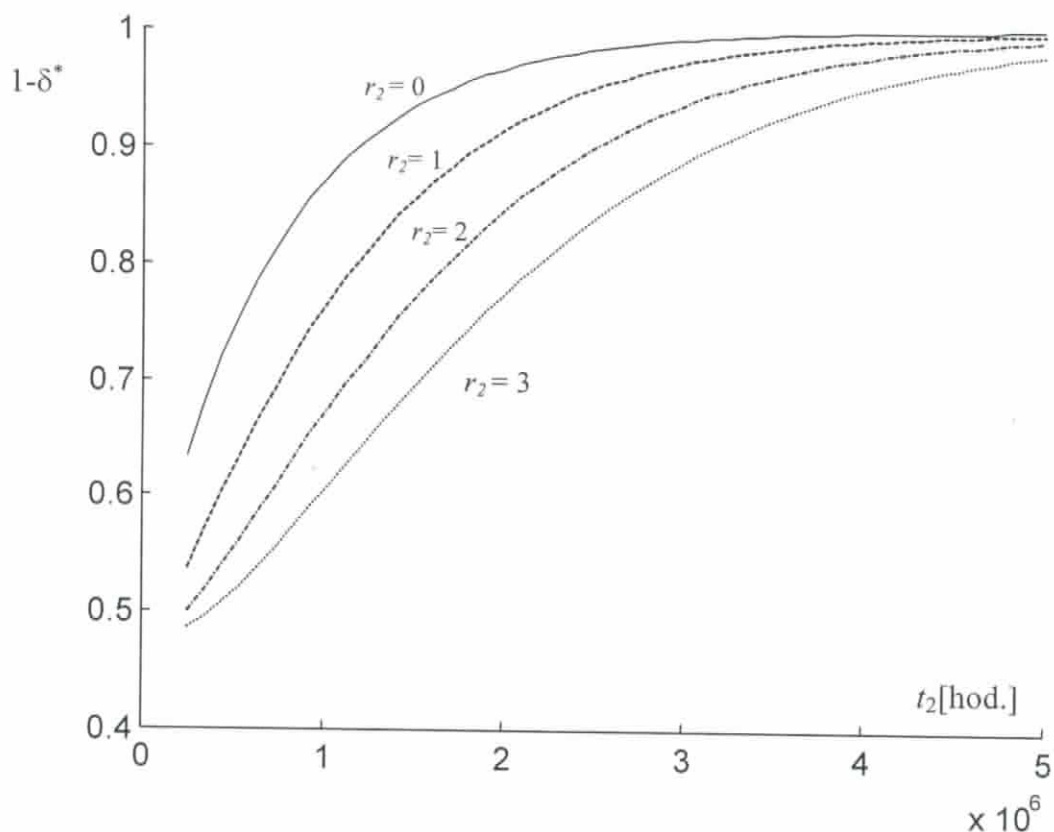


Aposteriorní hustota $pdf(\lambda_2)$ pro výběrové plány P_1, P_2, P_3 a P_4

Konečně můžeme vypočítat aposteriorní riziko odběratele δ^* . Pro výběrový plán:

$$(t_2, r_2) = (1.53 \times 10^6 [\text{hod.}], 2)$$

je toto riziko $\delta^* = 0.23$, nebo jinak také lze konstatovat, že aposteriorní jistota, že $\lambda_1 \leq 100$ Fit pro vyhovující ZDS, je rovna 77 %. Závislost této aposteriorní jistoty $1 - \delta^*$ na t_2 je znázorněna na dalším obrázku. Aktuální hodnotu aposteriorní jistoty pro vybraný plán P_2 můžeme odečíst z křivky pro $r_2 = 2$.



Obrázek - aposteriorní jistota, že $\lambda_1 \leq 100$ Fit pro vyhovující ZDS, v závislosti na kumulované době zkoušení t_2

Výběrový plán pro zkoušení spolehlivosti, Situace 2

Situace 2 je charakterizována následujícím požadavkem na spolehlivost (formulovaným odběratelem):

Stanovit výběrový plán zkoušení tak, aby $\Pr(\lambda_1 \leq \lambda_0) \geq 1 - \alpha_0$,

kde α_0 je zadaná pravděpodobnost a λ_0 je zadaná hladina intenzity poruch, která má být uspokojena.

Definice: α_0 nazveme *apriorním rizikem odběratele*.

Číselně vyjadřuje apriorní riziko odběratele maximální přípustnou pravděpodobnost, že bude platit hypotéza $H_1: \lambda_1 > \lambda_0$

Pravděpodobnostní podmínku pro Situaci 2 můžeme přepsat do podoby pro realizaci ve zrychlených podmínkách následovně:

$$\Pr(\lambda_2 \leq A^* \lambda_0) \geq 1 - \alpha_0 \quad (\text{ii})$$

Na druhé straně víme, že MVO pro λ_2 je roven $\bar{\lambda}_2 = \frac{r_2}{t_2}$

Při předpokladu exponenciálního rozdělení doby do poruchy lze ukázat, že náhodná veličina

$$2r_2 \frac{\lambda_2}{\bar{\lambda}_2} = 2\lambda_2 t_2$$

má rozdělení chí-kvadrát s $(2r_2 + 2)$ stupni volnosti pro časově cenzorovaný test. Odtud můžeme určit konfidenční intervaly, například $1 - \alpha_0$ přidružené k $\bar{\lambda}_2$ pomocí rozdělení chí-kvadrát z následující rovnice:

$$1 - \alpha_0 = \sum_{k=r_2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_2 t_2}}{k!} (\lambda_2 t_2)^k = \int_0^{2\lambda_2 t_2} f(\chi^2) d\chi^2$$

V důsledku toho lze získat $100(1 - \alpha_0)\%$ jednostranný konfidenční interval pro λ_2

$$\Pr\left\{\lambda_2 \leq \frac{\chi_{1-\alpha_0}^2 (2r_2 + 2)}{2t_2}\right\} = 1 - \alpha_0 \quad (\text{iii})$$

Takže podmínky (ii) a (iii) dávají dohromady následující podmínku pro optimalizaci t_2 ,

$$A^* \lambda_0 \geq \frac{\chi_{1-\alpha_0}^2 (2r_2 + 2)}{2t_2}$$

a odtud

$$t_2 \geq \frac{\chi_{1-\alpha_0}^2 (2r_2 + 2)}{2A^* \lambda_0}$$

Optimalizaci výběrového plánu pro ZDS lze nyní provádět podobně jako v Situaci 1 s tím rozdílem, že nyní musí být uspokojena tato podmínka.

Příklad

Předpokládejme, že odběratel vysoce spolehlivého výrobku stanoví spolehlivostní požadavek ve tvaru

$$\Pr(\lambda_1 \leq 100Fit) \geq 1 - \alpha_0 = 0.7$$

Dále předpokládejme, že výrobce má s tímto výrobkem jisté výrobní zkušenosti, které jsou pro jednoduchost stejné jako v příkladě pro Situaci 1.

Tabulka 3 přináší možné výběrové plány pro ZDS, které vyhovují odvozené podmínce pro t_2 , s odpovídajícími statistickými charakteristikami $E\{\lambda_2/t_2, r_2\}$, $Var\{\lambda_2/t_2, r_2\}$, $Med\{\lambda_2/t_2, r_2\}$ a 90% kvantil λ_2 .

Výběrový plán	t_2 [10 ⁶ hodin]	r_2	$E\{\lambda_2/t_2, r_2\}$ [Fit]	$Var\{\lambda_2/t_2, r_2\}$ [10 ⁻¹³] $\sqrt{Var\{\lambda_2/t_2, r_2\}}$ [10 ⁻⁷]	$Med\{\lambda_2/t_2, r_2\}$ [Fit]	90% kvantil λ_2 [Fit]
P_1	0.92		674	4.94 7.03	450	1560
P_2	1.86		828	3.61 6.01	684	1641
P_3	2.76		906	2.84 5.33	801	1640
P_4	3.63		958	2.36 4.86	879	1640

Tabulka 3 : Výběrové plány pro demonstraci spolehlivosti, Situace 2

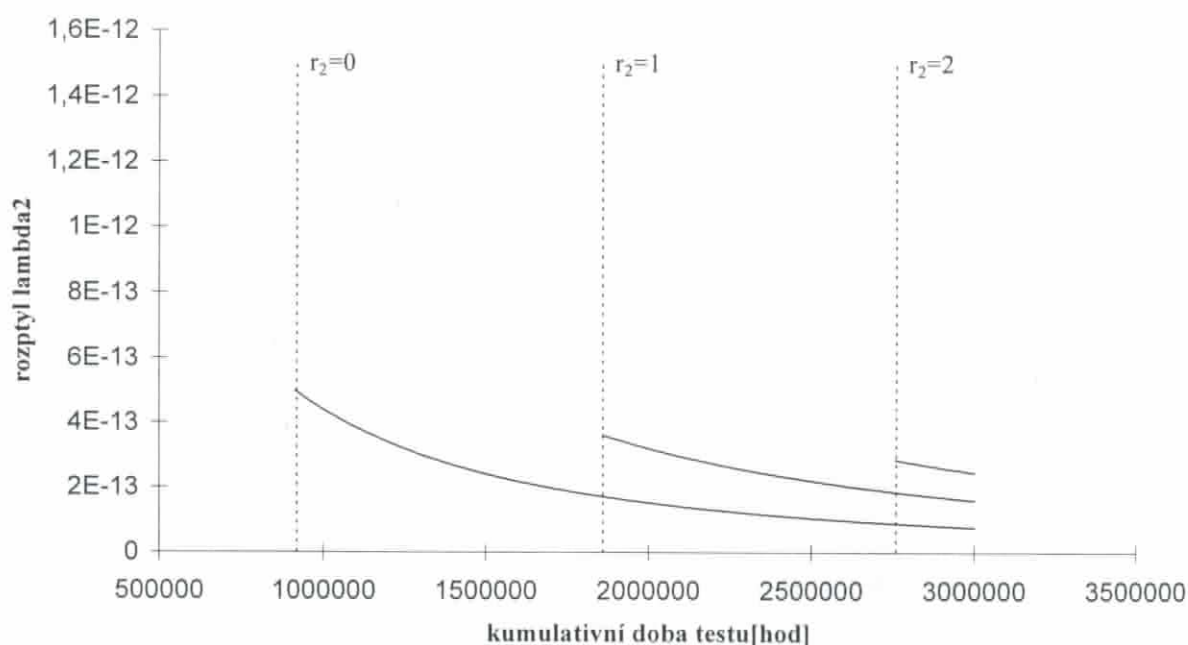
r_2	0	1	2	3	4	5	6
-------	---	---	---	---	---	---	---

t_2 [10 ⁶]							
0.92	0.35 38	0.2194	0.1419	0.0937	0.0625	0.0419	0.0282
1.86	0.21 84	0.1628	0.1253	0.0982	0.0777	0.0620	0.0796
2.76	0.16 09	0.1288	0.1058	0.0882	0.0743	0.0629	0.0535
3.63	0.12 86	0.1071	0.0912	0.0786	0.0683	0.0597	0.0524

Tabulka 4: Podmíněné pravděpodobnostní rozdělení $pdf(r_2 | t_2)$

Tabulka 4 prezentuje numerické hodnoty $pdf(r_2 | t_2)$, které potřebujeme pro výpočet aposteriorního rizika odběratele δ^* . Rozptyl (viz obrázek níže) se jeví menší než ukazují výběrové plány pro Situaci 1 a není ani tolik závislý na kumulované době t_2 (pro volbu $\alpha_0 = 0.3$). Jelikož testovací možnosti výrobce jsou zpravidla omezené (co do kapacity zkoušení), navíc významnou úlohu v dnešním konkurenčním prostředí hraje i rychlost provedení ZDS, to vše by nasvědčovalo ve prospěch výběrového plánu P_2 resp. P_1 . Konečné rozhodnutí by mělo být přijato na základě konsensu mezi výrobcem a odběratelem s ohledem na statistické charakteristiky λ_2 . Pomůckou pro rozhodování může být závislost podmíněného aposteriorního rozptylu $Var\{\lambda_2/t_2, r_2\}$ na kumulované době zkoušení t_2 , která je demonstrována pro daná data na obrázku níže. Dalším výstupním parametrem, který může být předmětem optimalizace v dodavatelsko odběratelských vztazích, je *aposteriorní riziko odběratele* δ^* , které představuje aposteriorní pravděpodobnost, že bude platit hypotéza $H_1: \lambda_1 \geq \lambda_0$ za podmínky, že zkouška spolehlivosti ve zrychleném prostředí je vyhovující. Doplněk aposteriorního rizika do jedničky (aposteriorní jistota $1 - \delta^*$) v závislosti na odzkoušené kumulativní době t_2 lze odečíst z obrázku pro aposteriorní jistotu výše. Zadané apriorní riziko 30 % ($\alpha_0 = 0.3$), jež se po aktualizaci reálnými daty modifikuje na aposteriorní riziko δ^* , se sníží na necelých 15% pro výběrový plán P_1 , resp. 10% pro plán P_2 .

Aposteriorní rozptyl lambda2 pro Situaci 2



Závěrečné poznámky

Příspěvek prezentuje použití a doplnění Bayesova přístupu v několika směrech. Za prvé, při předpokládaném exponenciálním modelu je tento aparát použit pro účely transformace dat ze zrychleného (teplotou) do normálního prostředí, je kvantifikován faktor zrychlení, přičemž jsou efektivně využívána zdánlivě nepotřebná dlouhodobě nahromaděná vlastní data výrobce (apriorní informace), stejně jako experimentální zkušenosti jiných výrobců ekvivalentního výrobku (vyrobeného ekvivalentní technologií). Za druhé, Bayesův přístup v kombinaci s metodou maximální věrohodnosti je použit ke stanovení výběrového plánu zkoušení tak, aby byly uspokojeny požadavky odběratele, které jsou definovány dvojím způsobem (Situace 1, Situace 2), a aby statistické charakteristiky (jako např. rozptyl) Bayesovsky pojatého parametru, pro který je koncipován výběrový plán, byly pod kontrolou. Za třetí, Bayesův přístup je využit k určení tzv. *aposteriorního rizika odběratele*, definovaného výše.

Kombinace metody maximální věrohodnosti s Bayesovým přístupem je přirozená, neboť pro velké výběry lze ukázat, že asymptotické rozdělení odhadu parametru získaného metodou maximální věrohodnosti je normální, stejně jako aposteriorní rozdělení stejného parametru (při platnosti vhodných podmínek regularity a za předpokladu, že apriorní hustota je kladná a spojitá v celém parametrickém prostoru). Příčinou je hlavně to, že ve velkých

výběrech v aposteriorním rozdělení dominuje věrohodnostní funkce a logaritmická věrohodnostní funkce je asymptoticky kvadratická. Tedy pro velké výběry platí, že klasický i Bayesův přístup vedou ke stejné indukci, ačkoliv interpretace je dosti odlišná.

Použitá literatura

- [1] Briš R., Bayes approach in RDT using accelerated and long-term life data, Reliability Engineering and System Safety, ELSEVIER, Vol.67 No.1 January 2000, ISSN: 0951-8320
- [2] Nelson W.: Accelerated Testing, Statistical Models, Test Plans, and Data Analysis; Wiley 1990, ISBN 0-471-52277-5.
- [3] Martz H.F., Waller R.A.: Bayesian Reliability Analysis; Wiley 1982, ISBN 0-471-86425-0.

Poděkování:

Autor tohoto příspěvku děkuje za finanční podporu ze strany projektu výzkumu a vývoje č. CEZ MSM6198910007, který je financován z prostředků MŠMT ČR.

Využití Bayesovské analýzy při kvantifikaci parametrů modelů spolehlivosti a rizik jaderně-energetických technologií

Jaroslav Holý, Oddělení analýz spolehlivosti a rizik, Ústav jaderného výzkumu Řež, 25068, Řež Česká republika, hoj@ujv.cz

1. Úvod

Teorie Bayesovské analýzy je netriviální matematickou disciplínou, jejíž exaktní popis si vyžaduje poměrně náročný aparát teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky. Přesto lze Bayesovské metody efektivně využívat při praktických realizacích odhadů parametrů spolehlivostních modelů v prostředí zatíženém výrazným nedostatkem dat a něj vyplývající velkou mírou nejistoty kvantitativního popisu reality. Příkladem takového prostředí, kterým se zabývá tento příspěvek, jsou vybrané segmenty pravděpodobnostního modelu bezpečnosti provozu (PSA) jaderné elektrárny odrážející velikost potenciálu pro vznik nežádoucích událostí, kde ani extrémně malá pravděpodobnost výskytu nemůže pro velmi závažné eventuální následky vést k závěru o malém nebo dokonce zanedbatelném úhrnném rizikovém příspěvku.

2. Parametry pravděpodobnostního modelu bezpečnosti provozu jaderné elektrárny s potenciálem pro užití Bayesovského přístupu ke kvantifikaci

Typický pravděpodobnostní model bezpečnosti provozu jaderné elektrárny je v současnosti velmi složitou strukturou s řádově mnoha tisíci prvků. Každý z těchto prvků je reprezentován „malým“ spolehlivostním modelem, pro nějž je nutné vyčíslit hodnoty parametrů. Mohutnost zdrojů dat využitelných pro odhad parametrů reprezentujících charakter (chybového) procesu se pro jednotlivé kategorie parametrů PSA modelu výrazně odlišuje a vede k následujícím krajním obecným možnostem řešení problematiky odhadu v praxi:

- **bohatý zdroj** dat z provozu dané elektrárny - parametry spolehlivostního modelu se odhadují běžnými statistickými metodami (v kontextu PSA se v praxi mluví o přímém odhadu)
- (téměř) **nulový zdroj** dat z provozu elektrárny - k odhadu je nutné využít generická data, tj. data z provozu jiných příbuzných (pokud taková data jsou

k dispozici) nebo i typově odlišných jaderných elektráren, nebo je možné/nutné (při absenci takových dat, ale i při jejich existenci) opřít odhad o subjekt experta.

Na pomezí těchto alternativ (poměrně širokém, jak ostatně lze intuitivně očekávat z rozdílu mezi „bohatým“ a „nulovým“ zdrojem dat) se nacházejí poměrně časté (a z pohledu příspěvku k výsledkům rizikové studie klíčové) případy výskytu omezeného množství dostupné specifické informace, jejíž rozsah nepostačuje k dostatečně věrohodné kvantifikaci parametrů modelu, ale jejíž nevyužití by bylo zcela nelogické. V těchto situacích se jako vhodná volba řešení problému kvantifikace nabízí užití Bayesovských metod statistické analýzy adaptovaných na problém kombinování méně věrohodných generických dat s cennou, ale málo objemnou specifickou informací.

Očekávané využití Bayesovské analýzy je dáno četností výskytu případů

„dobrá“ generická data + málo obsažná, nicméně existující specifická data

a je pro jednotlivé kategorie parametrů PSA modelu specifikováno v následující tabulce.

Tabulka 1: využití Bayesovské analýzy při odhadu parametrů PSA modelů jaderných elektráren pro různé kategorie parametrů

Typ parametru modelu PSA	Využití Bayesovské analýzy	Komentář
intenzita nezávislé poruchy	střední	Většina odhadů je realizována s využitím specifických dat (současné elektrárny jsou již provozovány po desetiletí). Motivací pro užití Bayesovské analýzy může být vytvoření prostředí pro kontinuální

		aktualizaci hodnot parametrů. Pro (téměř) nové elektrárny je Bayesovská analýza poznanou nutností. Technika užití Bayesovské analýzy je podobná jako pro případ frekvencí iniciačních událostí rozpracovaných v tomto příspěvku.
pravděpodobnost nezávislého selhání	střední	K potenciálu pro využití platí obdobné závěry jako pro intenzity nezávislých poruch. Technika užití je v detailech (volba typu apriorního rozdělení a rozdělení popisujícího specifickou informaci) jiná než pro dále popsanou aplikaci pro kategorii frekvencí iniciačních událostí.
frekvence iniciační události	vysoké	V řadě případů nejlepší cesta k maximálně věrohodné a kvalitní kvantifikaci parametrů. Široce využíváno.
pravděpodobnost lidské chyby	malé	Historický vývoj vedl jinými cestami a Bayesovský odhad není pro tuto kategorii parametrů ve větší míře využíván. V současné době se však objevují indikace možných změn v přístupech a není vyloučen výrazný nárůst aplikací reprezentujících dokonce vícenásobné pojetí přístupu k strategii analýzy - první možností je například

		užití literárních dat jako generických a kombinovaného názoru expertů na provoz elektrárny jako specifických vstupů (užito v PSA finských elektráren), druhou možností užití expertního odhadu jako generické informace a statistiky událostí z hodnocené elektrárny jako specifických dat.
pravděpodobnost násobné poruchy	velmi malé	Využití je zásadně omezeno extrémně malým rozsahem specifické informace. V budoucnosti lze očekávat mírný nárůst využití.
nepohotovost z důvodu údržby	nulové	Vzhledem k vysoké specifičnosti strategie údržby pro danou elektrárnu a velkému objemu dostupných specifických dat není aplikace Bayesovského přístupu ani nutná, ani vhodná.

3. Specifika užití Bayesovského přístupu v modelu moderní technologie provozované na měřitelné úrovni rizika

Exaktní popis východisek a nástrojů Bayesovského odhadu zachází za rámec tohoto příspěvku. Vcelku hezký, instruktivní úvod k problematice Bayesovské analýzy z pohledu statistika lze nalézt v [1]. Přesto je vhodné se stručně zmínit alespoň o některých typických vlastnostech Bayesovských odhadů a podrobněji definovat rozdíl mezi klasickým a Bayesovským odhadem, tak jak se projevuje v aplikacích pravděpodobnostního hodnocení bezpečnosti složitých moderních technologií.

Klasický odhad frekvence iniciační události bývá v praxi v projektech PSA ztotožňován s podílem počtu výskytů dané iniciační události a počtu reaktor-roků, během kterých byl výskyt iniciační události zaznamenáván. Silné zákony teorie pravděpodobnosti jsou příslibem toho, že získaný odhad bude při dostatečně velkém a dále rostoucím počtu reaktor-roků konvergovat ke konstantní skutečné hodnotě frekvence výskytu iniciační události vztahené na jeden rok provozu.

V případě, že počet „záznamů“ v datovém souboru získaném z provozní historie studované elektrárny, popisujícím danou iniciační událost, je malý, může být hodnota přímého odhadu frekvence velmi vzdálená její **skutečné** hodnotě a vzhledem k tomuto riziku nelze hodnotu odhadu použít pro bezpečnostně orientované rozhodování, které si vždy, mimo jiné, zakládá na dostatečné konzervativnosti přístupu. V takovém případě je zvykem přihlídnout k řadě doplňujících zdrojů, které poskytují podklady pro odhad frekvence dané iniciační události vycházející z mírně nebo více odlišných podmínek (jiná elektrárna stejného typu nebo i elektrárna odlišného typu). Numerické hodnoty těchto odhadů se budou od sebe lišit ze dvou důvodů:

- z důvodu **přirozené variability** každého statistického odhadu při změně rozsahu informace využité pro odhad (stejný typ odlišnosti jako mezi dvěma klasickými odhady téže pravděpodobnosti - rozdílné statistiky o téže události dají rozdílné odhady její frekvence)
- z důvodu částečné **odlišnosti podmínek** vzniku iniciační události na různých, byť třeba příbuzných jaderných elektrárnách.

Původní iniciační událost je neoddělitelně spojena se specifickou jadernou elektrárnou (a právě tak je s touto elektrárnou spojen odhad frekvence události). Frekvence vzniku dané iniciační události během jednoho roku je na každé elektrárně jiná v důsledku variability místních podmínek. Namísto klasického postupu lze pak předpokládat, že hodnoty frekvencí iniciační události pro jednotlivé elektrárny jsou číselnými realizacemi náhodné veličiny. Odhad frekvence výskytu iniciační události pak lze získat aplikací Bayesovského přístupu.

Předností klasických metod odhadu je jejich jednoduchost a přímočarost. Uživatel metod, který není expertem v oboru teorie pravděpodobnosti, se snáze ztotožní s principy klasického odhadu než s abstraktním charakterem Bayesovských metod. Uvedené přednosti klasických metod se však mohou projevit pouze v případě, že jsou splněny základní

předpoklady užití metod, mimo jiné existence minimálního postačujícího datového souboru na jehož základě lze provést klasický odhad parametru. V případě, že tato podmínka není splněna, metody klasického odhadu selhávají. Bayesovské metody pak, přes odlišnou filosofii své podstaty, umožňují zkompletovat alespoň minimálně věrohodné odhady parametrů, které jsou vyžadovány jako vstupy do vyšší úrovně pravděpodobnostního modelu bezpečnosti provozu dané elektrárny.

Bayesovské metody navíc umožňují spojit nedostatečnou informaci o specifické jaderné elektrárně s nejen s generickými daty popisujícími frekvence iniciačních událostí na podobných elektrárnách, ale i se zcela „subjektivními“ odhady expertů (Je vhodné zdůraznit, že **subjektivita** je zde často **subjektivně** zmiňovaným a zdůrazňovaným rysem s negativním nádechem, ale ve skutečnosti může expertní odhad **objektivně** reprezentovat relativně velmi silný a vyvážený datový zdroj.) Finální hodnota frekvence, jež je odvozena spojením tří uvedených zdrojů informace (výskyt událostí na studované elektrárně ze specifické strany Bayesovské aplikace, generická data a subjektivní odhad expertů z její generické strany), pak již často postačuje k odvození hodnot frekvencí přijatelné míry věrohodnosti.

V každém případě je třeba upozornit na to, že Bayesovský odhad pravděpodobnosti je z ryze formálního hlediska zcela jiný matematický postup než klasický odhad a nelze např. "srovnávat přesnost" Bayesovského a klasického odhadu. Při řešení konkrétního problému lze ovšem preferovat jeden typ odhadu. V případě, že existuje určitý minimální statistický soubor generických dat i dat z provozu analyzované elektrárny, hrají specifická data v modelu klíčovou roli zatímco doplňující generická data pouze korigují výsledné hodnoty frekvence. Důležitost generických dat ovšem může adekvátně vzrůst v případě, že je specifický zdroj velmi chudý a naopak dále klesá, je-li specifický zdroj dat relativně bohatý. Bayesovský odhad tak vcelku vyváženě spojuje obě složky dat a vytěží z nich maximum pro hledaný odhad frekvence.

4. Technika použití Bayesovského přístupu v praxi současných pravděpodobnostních studií bezpečnosti jaderných elektráren

Bayesovské postupy aplikované v kontextu pravděpodobnostního hodnocení bezpečnosti (a i jinde) jsou založeny na následujícím obecném schématu:

GENERICKÁ VÝCHOZÍ INFORMACE

+

SPECIFICKÁ KONKRÉTNÍ INFORMACE OBJEMOVĚ ROSTOUCÍ S ČASEM

=

SOUHRNNÁ SLOŽENÁ VYČERPÁVAJÍCÍ VÝSLEDNÁ INFORMACE.

Protože je Bayesovský model matematickým modelem, jsou všechny tři jeho složky v modelu zpracovávány pomocí matematických objektů.

Generická výchozí informace je do modelu implantována pomocí *apriorního* pravděpodobnostního rozložení. Konkrétní generická data, která jsou k dispozici, jsou využita k určení numerických hodnot parametrů apriorního rozdělení. Obecný tvar rozdělení (normální, lognormální, Beta, Gama) se v praxi volí do jisté míry nezávisle na generických datech.

I druhá složka modelu, specifická informace, je do modelu vložena pomocí pravděpodobnostního rozložení. Styl práce s rozdělením se značně liší od případu první složky modelu a rozdělení se vybírá ze zcela jiné třídy pravděpodobnostních rozdělení. Parametry rozdělení jsou přímo odvozeny z datových záznamů, dokumentujících průběh specifických procesů probíhajících na jaderné elektrárně a potenciál pro jejich selhání (ve smyslu naplnění rizikových ukazatelů).

Základem pro třetí, výslednou složku modelu, je aposteriorní pravděpodobnostní rozdělení. Toto rozdělení podává vyčerpávající informaci o průběhu studovaného procesu, která byla odvozena základě generických dat modifikovaných zahrnutím specifické informace. Praktický význam mají hlavně numerické hodnoty některých parametrů aposteriorního rozdělení, které přímočaře umožňují kvantifikovat hledané frekvence událostí. Aposteriorní rozdělení je získáno z apriorního rozdělení a z rozdělení popisujícího specifickou informaci aplikací **Bayesovy věty**.

Volba pravděpodobnostního modelu pro generickou informaci

Při výběru pravděpodobnostního modelu pro zahrnutí generické informace do studie je nutné zvolit **typ apriorního rozdělení** a na základě generických dat vyčíst **parametry rozdělení**.

Generická data, ze kterých jsou odvozovány frekvence iniciačních událostí pravděpodobnostních modelů bezpečnosti provozu JE, mají oproti obvyklým statistickým výběrům zpracovávaným metodami Bayesovské analýzy zcela specifický rys - odvozené frekvence jsou typicky **velmi malé**. I když matematická statistika pracuje při popisu jevů reálného světa daleko nejčastěji (přímo nebo zprostředkovaně) se symetrickým normálně rozděleným modelem, není tento model pro analýze extrémně malých frekvencí výskytu havarijních událostí vhodný a k popisu generických frekvencí je nutné volit jiná rozdělení. Nejčastěji jsou používána následující tři pravděpodobnostní rozdělení:

- logaritmicke-normální rozdělení
- Gama rozdělení
- některá ze třídy neinformativních rozdělení.

Logaritmicke normální apriorní rozdělení je z teoretického hlediska nejlepší volbou pro Bayesovský model popisující velmi malé frekvence výskytu zkoumané události. Rozdělení lze doporučit i z hlediska potřeb PSA modelu jak celku. Jedním z finálních kroků analýzy v rámci PSA projektu je **analýza neurčitostí** výsledných kvantitativních hodnot popisujících pravděpodobnost zkoumané vrcholové události modelu - poškození aktivní zóny reaktoru. Při této analýze je lognormální rozdělení běžně používáno pro modelování nejistoty odhadů numerických hodnot většiny parametrů PSA studie (pravděpodobností lidských selhání, intenzit poruch komponent, pravděpodobností násobných poruch se společnou

příčinou). Jestliže je lognormální rozdělení rovněž postulováno jako apriorní k použití v Bayesovském modelu zavedeném pro frekvence iniciačních událostí, je celý PSA model z hlediska volby pravděpodobnostních rozdělení relativně konzistentní (přestože aposteriorní rozdělení vycházející z procesu odhadu frekvence již lognormální obecně není).

Logaritmicko-normální rozdělení však není nejvhodnější z hlediska praktického provádění výpočtů. Numerické výpočty jsou při jeho využití jako součásti realizace Bayesovského přístupu mnohem méně transparentní a vyžadují použití k vyčíslení hodnot parametrů poměrně náročné numerické techniky (numerickou integraci). Kromě toho je užití asymetrického lognormálního rozdělení spojeno s některými speciálními omezeními, která jsou například v porovnání s „obvyklým“ symetrickým normálním modelem zcela nová a poněkud překvapivá. Na druhé straně je síla výhrad k užití lognormálního modelu z pohledu numerické náročnosti v poslední době značně redukována díky velmi rychlému rozvoji výpočetní techniky - jak v oblasti hardware, tak v oblasti software.

Rozdělení Gama je z teoretického hlediska pro naplnění role apriorního rozdělení v odhadu frekvencí iniciační události téměř tak vhodné jako lognormální rozdělení. Navíc lze na základě silných vět teorie pravděpodobnosti prokázat, že za poměrně obecných podmínek již určitý „nevelký“ nárůst specifické informace stírá rozdíl ve výsledcích analýzy (hodnotách parametrů aposteriorního rozdělení) vzniklý použitím odlišných apriorních rozdělení. Jinak řečeno, je-li k dispozici určitý minimální objem specifické informace, výsledné numerické "aposteriorní" hodnoty frekvencí získané užitím Bayesovského přístupu málo závisí na volbě **typu** apriorního rozdělení a je možné volit to apriorní rozdělení, které je nejvýhodnější pro provedení praktických výpočtů.

Rozdělení Gama je právě pro provedení **praktických** výpočtů **velmi vhodné**. Toto rozdělení totiž vytváří s dalšími složkami Bayesovského pravděpodobnostního modelu pro odhad **frekvencí** iniciačních událostí tzv. *konjugovaný systém*. Veškeré numerické výpočty v rámci takového pravděpodobnostního modelu jsou pak na rozdíl od užití apriorního lognormálního rozdělení velmi jednoduché a snadno proveditelné.

Další výhodou rozdělení Gama je, že jeho užití nepodléhá nepříjemným omezením, se kterými je svázáno užití lognormálního rozdělení. Kromě toho má rozdělení Gama ještě psychologickou výhodu - praktický význam obou parametrů rozdělení je velmi názorný a dobře představitelný (což nelze říci o parametrech lognormálního rozdělení).

Třída neinformativních rozdělení v sobě zahrnuje rozdělení, která lze použít tehdy, nemáme-li žádnou generickou informaci o odhadované frekvenci. Výběr neinformativního rozdělení s sebou přináší řadu nástrah, jejichž teoretický popis zachází za rámec tohoto textu, viz například opět [1]. Je třeba poznamenat, že volba neinformativního rozdělení **není vyjádřením malé víry** v generická data, která jsou k dispozici, ale je východiskem z nouze bezprostředně spojeným s **popřením existence** jakýchkoli generických dat popisujících danou událost. I pro velmi málo věrohodná generická data je správnou volbou výběr apriorního rozdělení, které **nepatří** do této třídy. Bayesovský přístup je totiž implicitně určen právě pro analýzu málo věrohodných dat.

Odvození numerických hodnot parametrů apriorního rozdělení

Druhou důležitou složkou apriorního modelu jsou numerické hodnoty parametrů zvoleného rozdělení. Lognormální i gama rozdělení patří do třídy dvouparametrických rozdělení a v obou případech je třeba dodat do modelu dvě numerické hodnoty parametrů, tyto dvě hodnoty určují dané rozdělení vyčerpávajícím způsobem. V případě neinformativních rozdělení není třeba (ani možné) odvodit numerické hodnoty parametrů (protože neexistuje žádná generická informace, kterou by bylo možné zkoncentrovat do číselné hodnoty parametru).

Obvykle nelze přímo určit numerické hodnoty parametrů rozdělení na základě generického datového souboru. Typický generický datový soubor však poskytuje podklady pro výpočet **jiných charakteristik** apriorního rozdělení. Z číselných hodnot těchto charakteristik jsou pak určeny numerické hodnoty parametrů hustoty rozdělení.

Odvození hodnot číselných charakteristik apriorního rozdělení

Nejčastější dvojicí charakteristik rozdělení, kterou lze získat z generického datového souboru je dvojice

CHARAKTERISTIKA POLOHY CENTRA ROZDĚLENÍ + CHARAKTERISTIKA MAXIMÁLNĚ PESIMISTICKÉHO
ODHADU.

Volba významu charakteristiky polohy centra rozdělení bývala víceméně věcí vkusu. V počátečních obdobích aplikace pravděpodobnostních metod k výstavbě rizikových modelů

provozu JE (viz např. klasickou WASH-1400 studii [2]) se za centrální charakteristiku rozdělení používal převážně **medián** rozdělení. V poslední době je však za standard pokládána volba **střední hodnoty** jako centrální charakteristiky rozdělení. Střední hodnota má totiž (na rozdíl od mediánu) důležitou vlastnost aditivity, tj. střední hodnota součtu dvou náhodných veličin je rovna součtu jejich středních hodnot, zatímco medián tuto vlastnost nemá.

V případě **lognormálního** rozdělení podléhá volba střední hodnoty jako centrální charakteristiky rozdělení jednomu důležitému explicitnímu omezení. Lze dokázat platnost tvrzení

95% kvantil logaritmicko-normálního rozdělení je maximálně 3.8681... násobkem střední hodnoty rozdělení,

jež je přímým důsledkem speciálních vlastností asymetrické hustoty lognormálního rozdělení. Odtud vyplývá, že máme-li pro apriorní rozdělení (z jakýchkoli zdrojů) k dispozici centrální a konzervativní charakteristiku, jejichž poměr je větší než 3.8681..., nelze v praxi položit centrální charakteristiku za střední hodnotu rozdělení a konzervativní charakteristiku za 95%ní kvantil rozdělení (ve skutečnosti toto nelze učinit ani pro charakteristiky, jejichž poměr se blíží dané hodnotě zdola, protože matematické vlastnosti takového lognormálního modelu jsou již velmi špatné).

Konkrétní charakteristiku pro maximálně pesimistický odhad obvykle volíme v souladu s významem charakteristiky uvedené v generickém zdroji. Nejčastěji bývá používána hodnota 95% kvantilu rozdělení, někdy se objevuje hodnota chybového faktoru EF definovaná jako symetrický podíl 95% kvantilu rozdělení a mediánu rozdělení a současně podíl mediánu rozdělení a 5%ního kvantilu rozdělení. Uvedená symetrie je však dána specifickými vlastnostmi lognormálního rozdělení a pro jiná rozdělení (speciálně v tomto kontextu rovněž užívané rozdělení gama) neplatí. V případě volby gama rozdělení jako apriorního se tak většinou pracuje přímo s kvantily rozdělení, i když je teoreticky možné zavést zobecněný chybový faktor jako podíl 95%ního kvantilu a mediánu rozdělení, bez bližšího vztahu k 5%nímu kvantilu rozdělení (v rizikových studiích je vždy klíčovou otázkou zajištění

postačující konzervativnosti, takže role 95%ního kvantilu nad rolí 5%ního kvantilu jednoznačně dominuje a dolní kvantil je v podstatě pro praxi nezajímavý).

V ideálním případě je generický datový soubor tvořen několika nezávislými odhady hledané frekvence iniciační události spojenými s částečně odlišnými jadernými elektrárnami a několika jim odpovídajícími "horními mezemi odhadů", tj. maximálně konzervativními (ale ještě rozumnými) variantami těchto odhadů. Střední hodnotu apriorního rozdělení lze pak určit jako geometrický průměr odhadů frekvence z generických zdrojů nebo lze vybrat jedinou určitou hodnotu, o které lze odůvodněně předpokládat, že z nějakého důvodu reprezentuje alternativu nejbližší provozu hodnocené elektrárny. Druhou charakteristikou apriorního rozdělení, která se vybírá podle podobných zásad, je 95% kvantil apriorního rozdělení.

Volba **geometrického** průměru jako charakteristiky průměrnosti je indikována výraznou intuitivní asymetričností souboru realizací náhodných veličin, které se používají k odvození frekvencí iniciačních událostí. Jestliže například máme k dispozici jako dvě krajní hodnoty odhadované frekvence 10^{-4} a 10^{-6} , jeví se v kontextu pravděpodobnostních modelů rizika zcela přirozené užít jako průměrnou hodnotu 10^{-5} (což je hodnota geometrického průměru) a nikoli přibližně 5×10^{-5} , což je hodnota průměru aritmetického.

Při práci se zdroji generické informace je třeba zachovávat velkou opatrnost. Oblast frekvencí iniciačních událostí je typickou oblastí "řidkých dat". Mezi všemi realizovanými PSA studii, které jsou hlavním zdrojem generických frekvencí iniciačních událostí, neexistuje jediná, která by odhad frekvencí mohla založit pouze na vlastních specifických datech. Jinými slovy, všechny PSA studie využívají nějakým způsobem generická data (nejčastěji jde právě o Bayesovský přístup) a proto jsou hodnoty frekvencí odvozené v jednotlivých studiích **silně závislé**, dokonce je velmi pravděpodobné, že existuje jistý "společný základ", který je dále spontánně používán jednotlivými studii a na jehož masivní jádro jsou dále a dále nabalovány tenké slupky specifických informací z jednotlivých elektráren. Tato skutečnost vede k doporučení nepoužívat k odhadu apriorní střední hodnoty geometrický průměr generických frekvencí (ani jakoukoli jinou zprůměrnovanou charakteristiku), namísto toho raději položit hodnotu apriorní střední hodnoty rovnou přímo

jedné zvolené (nejvíce věrohodné) generické frekvenci a podobně se zachovat i v případě 95% kvantilu apriorního rozdělení (při použití zprůměrované hodnoty se mohou rozhodujícím způsobem prosadit ty vlivy, které jsou v dané oblasti opakovaně využívány nejdéle, to znamená nejstarší informace, která již pravděpodobně nebude konzistentní se současným stavem provozu analyzované elektrárny).

Optimální praktický postup výběru charakteristik apriorního rozdělení na základě předchozích teoretických úvah je tedy následující:

- zdroje generické informace se zhodnotí z hlediska možných vzájemných závislostí
- v případě závislých zdrojů se vybere jediný nejlepší zdroj generické informace
- v případě prokázaně nezávislých zdrojů se numerické hodnoty popisující generickou informaci získají jako geometrické průměry všech (popřípadě bez odseknutých odlehlých pozorování) generických číselných hodnot zahrnutých do výběru generické informace (tj. numerická hodnota centrální charakteristiky se získá jako geometrický průměr numerických hodnot generických centrálních charakteristik, numerická hodnota 95% kvantilu apriorního rozdělení se získá jako geometrický průměr numerických hodnot generických 95% kvantilů)
- zvolí se typ konstruovaného apriorního rozdělení, při volbě se přihlédne k typu numerických charakteristik z generického souboru, které budou využity, je-li konzervativní generickou charakteristikou chybový faktor, existuje důvod navíc pro volbu apriorního lognormálního rozdělení, jinak je vhodnou volbou apriorní **gama rozdělení**
- v případě apriorního gama rozdělení nebo v případě apriorního lognormálního rozdělení popsaného pomocí chybového faktoru a v případě apriorního lognormálního rozdělení takového, že se poměr 95% kvantilu a hodnoty centrální charakteristiky neblíží mezní hodnotě 3.8681... se hodnota centrální charakteristiky ztotožní se střední hodnotou apriorního rozdělení
- v případě, že se poměr 95% kvantilu a hodnoty centrální charakteristiky blíží mezní hodnotě 3.8681 nebo ji překračuje, se hodnota centrální charakteristiky ztotožní s mediánem apriorního rozdělení
- typ konzervativní charakteristiky apriorního rozdělení se volí tak, aby odpovídal typu generické konzervativní charakteristiky, číselná hodnota konzervativní charakteristiky apriorního rozdělení je pak rovna číselné hodnotě vybrané generické konzervativní charakteristiky nebo geometrickému průměru z více hodnot nezávislých generických konzervativních charakteristik.

Po zvolení a vyčíslení **charakteristik** apriorního rozdělení je třeba transformovat jejich číselné hodnoty na číselné hodnoty **parametrů** hustoty rozdělení. Konkrétní transformace pochopitelně závisí na zvoleném typu rozdělení a na zvoleném typu charakteristik rozdělení.

Transformace hodnot číselných charakteristik apriorního rozdělení na hodnoty parametrů hustoty apriorního rozdělení

Označme parametry hustoty apriorního rozdělení p_1, p_2 , označme dále medián rozdělení m , střední hodnotu rozdělení E , 95% kvantil rozdělení k , chybový faktor rozdělení EF a druhou odmocninu z čísla SQRT.

Je-li zvoleným apriorním rozdělením **lognormální rozdělení**, existují pro všechny možné kombinace číselných charakteristik rozdělení explicitní vztahy, které umožňují vyčíslit hodnoty parametrů hustoty rozdělení. Podle konkrétní kombinace číselných charakteristik se k výpočtu hodnot parametrů rozdělení využijí dva z následujících vzorců:

$$p_1 = \ln m,$$

$$p_1 = \ln E - (\ln EF)^2/5.411$$

$$p_1 = \ln k - 2.705 + 1.645 \times \text{SQRT}(2.705 + 2 \times \ln(E/k))$$

$$p_2 = \ln EF/1.645$$

$$p_2 = \ln(k/m)/1.645$$

$$p_2 = \text{SQRT}(2 \times (\ln E - p_1))$$

Výše uvedené omezení pro použití lognormálního rozdělení týkající se poměru číselných hodnot střední hodnoty rozdělení a 95% kvantilu rozdělení nám zaručuje, že výraz pod odmocninou ve vzorci pro p_1 je kladný a vztah má v tomto případě vždy smysl.

Parametry gama rozdělení nelze určit z jednoduchých explicitních vztahů, tak jak je tomu v případě lognormálního rozdělení. Přesto je jejich určení ve většině případů dobře možné. Při určení parametrů využijeme následujících vztahů (značení jednotlivých charakteristik je stejné jako u lognormálního rozdělení až na jeden rozdíl - k_1 označuje 5% kvantil gama rozdělení a k_2 označuje 95% kvantil gama rozdělení):

$$E = p_1/p_2,$$

$$m = \chi^2_{0.5}(2p_1)/2p_2$$

$$k_1 = \chi^2_{0.05}(2p_1)/2p_2$$

$$k_2 = \chi^2_{0.95}(2p_1)/2p_2.$$

Hodnoty kvantilů χ^2 rozdělení lze nalézt ve statistických tabulkách. Tyto tabulky však obvykle obsahují kvantily rozdělení pouze pro celočíselné hodnoty argumentu, pro racionální hodnoty argumentu je nutné odvodit kvantily interpolací.

Vložení specifické informace do modelu

Podobně jako generická informace, je i specifická informace popsána pravděpodobnostním rozdělením. Protože se však práce se specifickou informací v rámci modelu liší od práce s generickou informací, je třída rozdělení, která se používají pro zahrnutí specifické informace do modelu, odlišná.

Z obecného hlediska je hlavním rozdílem mezi zpracováním generické a specifické informace to, že specifická informace je zpracovávána **kontinuálně**, v časové návaznosti. Cílem aplikací vytvořeného modelu není pouze jednorázová kvantifikace pravděpodobnostních bezpečnostních parametrů jaderné elektrárny, ale i zachycení všech změn těchto parametrů v budoucnosti. Na rozdíl od generické informace, která vytváří jednou provždy nutný základ pro vystavění modelu, je zpracování specifické informace časově podmíněným, opakovaným procesem.

Pro modelování specifické informace v rámci Bayesovského modelu pro frekvence iniciačních událostí je nejvhodnější Poissonovo rozdělení. Toto rozdělení má některé vlastnosti, které dobře odpovídají modelované realitě. Platí např. následující věta:

Jestliže posloupnost postupně nastávajících jevů má tu vlastnost, že doby mezi výskytem po sobě následujících jevů jsou nezávislé a mají všechny stejnou exponenciální distribuční funkci $1 - e^{-\lambda t}$ ($t > 0$), pak počet jevů v daném časovém intervalu $(0, t)$ má Poissonovo rozdělení s parametrem λt .

Uvedená věta vymezuje následující předpoklady, za kterých lze použít Poissonovo rozdělení pro modelování počtu výskytů dané iniciační události na specifické elektrárně:

- doba do výskytu poruchy má **exponenciální** rozdělení

- všechny doby do výskytu poruchy mají **stejně** exponenciální rozdělení
- doby do výskytu poruchy jsou **nezávislé**.

Tyto obecné předpoklady mají konkrétní důsledky pro platnost Poissonova modelu. Parametrem exponenciálního rozdělení je **konstantní** intenzita poruch. To znamená, že se v rámci Poissonovského modelu omezujeme na vyváženou a stabilní část provozního období elektrárny a neuvažujeme "období dětských nemocí" života elektrárny a období snížené bezpečnosti a spolehlivosti v důsledku stárnutí komponent. Praktickým důsledkem tohoto přístupu je, že nemusejí být do poruchové statistiky zařazeny poruchy z období těsně po zahájení provozu elektrárny. Druhým bezprostředním důsledkem uplatnění teoretických předpokladů je to, že model neuvažuje možné zlepšení provozních vlastností elektrárny na základě opatření provedených po výskytu poruchové události (exponenciální rozdělení doby do poruchy, resp. jeho parametr, je stále stejné). Taková opatření je však do PSA modelu možné implicitně zahrnut jinými způsoby.

Jiným základním charakteristickým rysem Poissonovského modelu plynoucím z teorie je, že výskyt poruchy v určitém časovém okamžiku nijak neovlivňuje pravděpodobnost výskytu poruchy v následujícím období (nezávislost dob do výskytu).

Poissonovo rozdělení je diskrétní rozdělení, které definuje pravděpodobnost vzniku r poruch během časového intervalu délky T následujícím způsobem:

$$p_r = (\lambda T)^r \times e^{-\lambda T} / r! .$$

V případě, že je jako apriorní rozdělení použito gama rozdělení nebo speciální typ neinformativního rozdělení, je celý proces odvození frekvence iniciační události tak přímočarý, že při jeho praktickém provádění není vůbec nutné studovat zmíněné Poissonovo rozdělení (přestože je nedílnou součástí modelu). V případě, že je jako apriorní rozdělení zvoleno lognormální rozdělení, je pro odhad frekvence iniciační události nutné aplikovat Bayesovu větu v explicitním tvaru, včetně kompletní složky popisující nárůst specifické informace, která je matematicky popsána Poissonovým rozdělením.

Odvození aposteriorního rozdělení pomocí Bayesovy věty

Jak již bylo výše uvedeno, není cílem a výsledkem Bayesovského přístupu odvození jediného číselného odhadu konstantní hodnoty frekvence iniciační události. Namísto toho poskytuje užití Bayesovského přístupu výsledek ve formě **aposteriorního pravděpodobnostního rozdělení**. Jakmile je aposteriorní rozdělení jednoznačně určeno explicitním tvarem své hustoty, je možno vyčíslit všechny jeho **klíčové charakteristiky** a použít některou z nich jako **odhad frekvence** iniciační události pro specifickou elektrárnu.

Teoretickým základem pro nalezení aposteriorního rozdělení na základě apriorního rozdělení reprezentujícího generickou informaci a diskrétního rozdělení reprezentujícího specifickou informaci je Bayesova věta v následujícím tvaru:

Označme p frekvenci iniciační události, $f(p)$ hustotu jejího apriorního rozdělení získanou na základě generických dat, dále označme T počet reaktor roků, po který evidujeme poruchy na zkoumaných elektrárnách specifického typu, a r počet poruch, které se vyskytly během období délky T , konečně označme $\pi(p|r,T)$ hledanou hustotu aposteriorního rozdělení, tj. rozdělení frekvence iniciační události za předpokladu, že apriorní rozdělení lze popsat hustotou f a že během časového období délky T bylo na zkoumané elektrárně evidováno r poruch. Pak platí,

$$\pi(p|r,T) = [f(p) \times (p \times T)^r \times e^{-pT} / r!] / I(f(p) \times (p \times T)^r \times e^{-pT} / r!).$$

kde I nahrazuje symbol pro určitý integrál spojitě funkce.

Technické provedení nalezení parametrů aposteriorní hustoty na základě Bayesovy věty se značně odlišuje podle typu připravené apriorní hustoty.

Je-li apriorní hustotou hustota gama rozdělení, tvoří tato hustota s Poissonovým rozdělením specifické informace tzv. **konjugovaný systém**. Tento technický termín neznamená z pohledu praktické analýzy nic jiného než to, že pro apriorní gama rozdělení a specifické Poissonovo rozdělení je aposteriorní rozdělení vždy (**opět**) **gama** rozdělení.

Parametry aposteriorního gama rozdělení lze přitom určit velmi jednoduchým způsobem. Protože všechny zajímavé charakteristiky aposteriorního gama rozdělení lze určit z jeho parametrů pomocí jednoduchých výše uvedených vztahů a statistických tabulek χ^2 -rozdělení, víceméně není v tomto případě nutné zabývat se technickým provedením Bayesovy věty a přítomností Poissonova rozdělení v modelu.

Číselné hodnoty parametrů q_1 , q_2 aposteriorního rozdělení lze v takovém případě určit z hodnot parametrů p_1 , p_2 apriorního rozdělení, délky sledovaného období na specifické elektrárně T a počtu r výskytů iniciační události daného typu během období délky T pomocí vztahů

$$q_1 = p_1 + r, \quad q_2 = p_2 + T,$$

jak je ihned vidět, jsou vztahy pro určení parametrů aposteriorního rozdělení skutečně velice jednoduché.

Druhou vhodnou apriorní hustotou, která může být použita v rámci Bayesovského modelu odhadu frekvencí iniciačních událostí, je apriorní hustota lognormálního rozdělení. Jak už bylo uvedeno, tento případ se z hlediska technického provedení liší od předchozích dvou případů. Apriorní hustota lognormálního rozdělení **netvoří konjugovaný systém** s Poissonovským modelem pro specifickou informaci, takže aposteriorní rozdělení, které získáme v rámci Bayesovského modelu z apriorního rozdělení, není stejného typu jako apriorní rozdělení, tj. lognormální a dokonce jde o rozdělení, které vůbec nelze popsat pomocí některého známého typu spojité hustoty rozdělení. Lze ovšem určit klíčové obecné charakteristiky rozdělení jako střední hodnotu, medián nebo kvantily rozdělení a na jejich základě odhadnout hledanou frekvenci iniciační události, k jejich nalezení je ovšem nutné použít poměrně náročné metody numerické integrace nebo metody diskrétní aproximace spojité funkce po částech konstantní funkcí a kombinování těchto diskrétních aproximací.

5. Závěr - shrnutí postupu

Při nedostatku dat popisujících výskyt iniciační události na specifické elektrárně je vhodné pro odhad frekvence iniciační události potřebný pro model pravděpodobnostního hodnocení bezpečnosti elektrárny využít Bayesovský přístup.

Je třeba zhodnotit možné zdroje generických dat pro kvantifikování konkrétní iniciační události a vybrat nejlepší zdroj (resp. nejlepší zdroje, pozor však na závislost zdrojů!). Dále se zvolí nejvhodnější apriorní rozdělení pro řešení dané úlohy. Z generických dat jsou odvozeny numerické hodnoty klíčových charakteristik rozdělení. Z hodnot klíčových charakteristik rozdělení jsou určeny hodnoty parametrů hustoty apriorního rozdělení.

Na základě informací o historii provozu specifické jaderné elektrárny (nebo skupiny elektráren daného typu) se zjistí počet reaktor-roků provozu a počet výskytů dané iniciační události. Generická informace je sloučena se specifickou informací pomocí Bayesovy věty. Výsledkem užití Bayesovy věty je nalezení aposteriorního rozdělení frekvence iniciační události.

Z těch charakteristik aposteriorního rozdělení, které jsou k dispozici po aplikaci Bayesovy věty, jsou odvozeny všechny ostatní důležité charakteristiky rozdělení. Střední hodnota aposteriorního rozdělení se využije jako odhad frekvence iniciační události v systémovém modelu elektrárny, který je součástí PSA studie. Kvantily aposteriorního rozdělení se použijí při analýze neurčitostí v rámci dané PSA studie.

Použitá literatura

- [1] Jiří Anděl, **Matematická statistika**, SNTL/ALFA, Praha 1978
- [2] U.S. Nuclear Regulatory Commission, „**Reactor Safety Study. An Assessment of Accident Risks in U.S. Commercial Nuclear Power Plant**“, WASH-1400, NUREG/CR-75/014, Washington DC

Praktické aplikace Bayesovských metod ve stavebnictví

Milan Holický a Miroslav Sýkora¹

¹České vysoké učení technické v Praze, Kloknerův ústav

Souhrn

Bayesovské metody se ve stavebnictví uplatňují nejčastěji při stanovení charakteristických a návrhových hodnot vlastností materiálů, které je důležitým krokem hodnocení existujících konstrukcí. Především v případech, kdy je k dispozici pouze malý počet výsledků zkoušek, lze při postupu založeném na Bayesově větě využít apriorní (předchozí) informace. Numerický příklad stanovení charakteristických a návrhových hodnot meze kluzu oceli S235 na základě malého počtu zkoušek naznačuje, že odhady kvantilů stanovené klasickými statistickými postupy mohou být značně konzervativní v porovnání s odhady stanovenými prostřednictvím Bayesovských postupů.

ÚVOD

Stanovení vlastností materiálů je obvykle důležitou součástí hodnocení spolehlivosti existujících konstrukcí. Výchozím podkladem pro hodnocení může být projektová dokumentace včetně statického výpočtu, které mohou uvádět vlastnosti vyšetřovaného materiálu. Na základě doplňujících znalostí o vlastnostech materiálů získaných z dlouholetých zkušeností při ustálené výrobě nebo ze sledování podobných konstrukcí pak může být stanoven tzv. apriorní teoretický model. Protože se vlastnosti materiálů obvykle považují za náhodné veličiny, jedná se o apriorní rozdělení pravděpodobností. Při pochybnostech o vhodnosti apriorního modelu se provedou a vyhodnotí zkoušky [1], které předpoklady potvrdí, případně vyvrátí. Na základě zkoušek lze dále s využitím Bayesovských postupů [2,3,4,5] apriorní rozdělení aktualizovat.

Příspěvek se zabývá případem, kdy se z dostupných poznatků [7] stanoví apriorní rozdělení pravděpodobností. Uvažují se pouze nejčastěji používaná rozdělení pro vlastnosti materiálu – normální (Gaussovo) a lognormální s počátkem v nule. Dále se předpokládá, že lze provést pouze omezený počet zkoušek. Nejdříve se uvádí postup odhadu kvantilu podle dokumentu ČSN EN 1990 [8] a stanovení kvantilu z teoretického modelu apriorních rozdělení [4]. Dále se popisuje stanovení posteriorního (aktualizovaného) modelu vlastnosti materiálu prostřednictvím Bayesovských postupů. Teoretický rozbor je doplněn numerickým příkladem, který naznačuje, že pravděpodobnostní metody se mohou účinně uplatnit při hodnocení existujících konstrukcí. Zvýšení charakteristické nebo návrhové hodnoty, které může být dosaženo s využitím všech znalostí o vlastnostech materiálu, může být žádoucí při hodnocení existujících konstrukcí především s ohledem na vyšší zatížení podle nových evropských předpisů EN Eurokódů.

VYHODNOCENÍ ZKOUŠEK PODLE ČSN EN 1990 A ČSN ISO 13822 A STANOVENÍ KVANTILU TEORETICKÉHO MODELU

Uvažujme dále, že vyšetřovaná vlastnost materiálu, jako je např. pevnost betonu v tlaku, mez kluzu nebo modul pružnosti oceli, je náhodná veličina a pro hodnocení spolehlivosti je potřebné stanovit charakteristickou nebo návrhovou hodnotu. Podrobný popis stanovení odhadu kvantilu náhodné veličiny na základě zkoušek s využitím postupů matematické statistiky lze nalézt např. ve sborníku [9]. Podrobnosti ke stanovení kvantilu podle ČSN EN 1990, přílohy D [8] a také podle ČSN ISO 13822 [1] se uvádí např. v příručce [20]. Pro úplnost a uvedení použitých symbolů se nyní zopakují nejdůležitější vztahy.

Z výsledků n zkoušek x_1, x_2, \dots, x_n se stanoví průměr m , směrodatná odchylka s a variační koeficient v podle vztahů:

$$m = \frac{\sum x_i}{n}; \quad s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - m)^2}{n-1}}; \quad v = \frac{s}{m} \quad (1)$$

Za předpokladu normálního rozdělení materiálové vlastnosti X se pak p -procentní kvantil x_p stanoví ze vztahu:

$$x_p = m (1 - k_n v) \quad (2)$$

kde k_n je součinitel p -procentního kvantilu, který je pro $p = 0,05$ uveden v tabulce NA.2 [8]. Součinitel k_n lze stanovit pro variační koeficient v stanovený podle vztahu (1) (neznámý V_X – viz příručka [20]) také jako:

$$k_n = -q_t(p, v) \sqrt{1 + 1/n} \quad (3)$$

kde q_t je kvantil Studentova t -rozdělení [10] odpovídající zadané pravděpodobnosti p a počtu stupňů volnosti (v tomto případě $v = n - 1$).

Pro lognormální rozdělení s počátkem v nule se p -procentní kvantil stanoví ze vztahu:

$$x_p = m e^{-k_n \sqrt{\ln(1+v^2)} - 0,5 \ln(1+v^2)} \quad (4)$$

Pro známou třídu materiálu lze často v dostupné literatuře nalézt podklady pro stanovení statistických charakteristik apriorního modelu [7,11,12,13] – vhodnou hustotu pravděpodobnosti $f^*(\bullet)$ a distribuční funkci $F^*(\bullet)$, průměr m^* a směrodatnou odchylku s^* (příp. i šikmost w^* , dolní mez x_0^* apod.). Poznamenejme, že symbol " " značí apriorní charakteristiky, symbol " " posterioerní a bez apostrofů se uvádí charakteristiky stanovené na základě zkoušek. Pro normální rozdělení $N(m^*, s^*)$ se hledaný kvantil určí ze vztahu:

$$x_p = m^* + u_p s^* \quad (5)$$

kde u_p je kvantil normovaného normálního rozdělení odpovídající pravděpodobnosti p .

Kvantil lognormálního rozdělení se určí ze vztahu:

$$x_p = m^* e^{u_p \sqrt{\ln(1+v^2)} - 0,5 \ln(1+v^2)} \quad (6)$$

V některých případech může vlastnost materiálu vykazovat vyšší nebo naopak nižší šikmost, než která je dána normálním ($w^* = 0$) nebo lognormálním rozdělením s počátkem v nule ($w^* = 3v^* + v^{*3}$). Pak je často vhodné popsat vlastnost prostřednictvím tříparametrického lognormálního rozdělení [4], pro které odhad kvantilu uvádí např. publikace [14,15].

Při malém počtu zkoušek mohou vést vztahy (2) a (4) ke konzervativním odhadům. Stanovení kvantilu na základě apriorního teoretického modelu ze vztahů (5) a (6) může být zatíženo chybou, pokud není zaručena třída materiálu. Proto je vhodné oba druhy informací kombinovat s využitím postupu založeném na Bayesově větě [4,5,16,17,18].

BAYESOVSKÝ POSTUP AKTUALIZACE PRAVDĚPODOBNOSTÍ

V tomto oddílu se na počátku vysvětlí Bayesova věta pro obecné jevy A a B . Dále se popíše její aplikace při aktualizaci apriorních informací na základě zkoušek. Podmíněná pravděpodobnost $P(A|B)$ jevu A za doplňující podmínky, že současně (nebo předem) nastal jiný jev B s nenulovou pravděpodobností $P(B)$, se definuje vztahem:

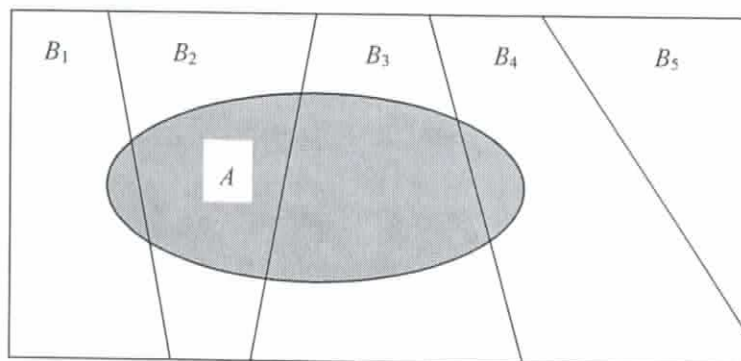
$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B) \quad (7)$$

Podobně platí:

$$P(B|A) = P(A \cap B) / P(A) \quad (8)$$

Jestliže podle Obr. 1 může jev A nastat pouze realizací jednoho z navzájem disjunktních jevů B_i , $i = 1, 2, \dots, n$, a jsou známé pravděpodobnosti $P(B_i)$ a podmíněné pravděpodobnosti $P(A|B_i)$, pak pravděpodobnost jevu A může být stanovena z věty o úplné pravděpodobnosti:

$$P(A) = \sum_i P(B_i) P(A|B_i) \quad (9)$$



Obr. 1. Jev A a navzájem disjunktní jevy B_i .

Ze vztahů (7), (8) a (9) plyne velmi důležitý vztah označovaný jako Bayesova věta

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i) P(A | B_i)}{\sum_j P(B_j) P(A | B_j)} \quad (10)$$

V klasickém pojetí statistiky se charakteristiky veličiny X (průměr m , směrodatná odchylka s , případně šikmost w , dolní mez x_0 apod.) uvažují jako deterministické hodnoty, které se odhadují na základě zkoušek [3,10]. Vektor charakteristik se v dalším textu značí symbolem Θ . U každého náhodného výběru (např. zkoušky kostek betonu za stanovených podmínek) [4] se charakteristiky odhadují odděleně na základě informací z vyhodnocení zkoušek.

V Bayesovském postupu se charakteristiky Θ uvažují jako náhodné a jejich rozdělení se aktualizují na základě zkoušek. Předpokládejme, že:

- výsledky zkoušek jsou x_1, x_2, \dots, x_n (jev A),
- veličina má apriorní sdruženou hustotu pravděpodobnosti $f(x|\Theta)$ závislou na náhodných parametrech Θ a
- $f_{\Theta}(\Theta)$ je apriorní sdružená hustota pravděpodobnosti parametrů Θ .

Označme realizaci vektoru $\Theta \in (\theta_i, \theta_i + \Delta\theta)$ jako jev B_i . Vztah (10) lze přepsat jako:

$$f_{\Theta}''(\theta_i | x_1, x_2, \dots, x_n) \Delta\theta = \frac{f_{\Theta}'(\theta_i) \Delta\theta \prod_{j=1}^n f'(x_j | \theta_i) \Delta x}{\sum_k f_{\Theta}'(\theta_k) \Delta\theta \prod_{j=1}^n f'(x_j | \theta_k) \Delta x} \quad (11)$$

kde $f_{\Theta}^{**}(\cdot)$ je aktualizovaná sdružená hustota pravděpodobnosti charakteristik Θ s uvážením výsledků zkoušek. Vzhledem k tomu, že sumace ve jmenovateli vztahu (11) se provádí přes celý definiční obor Θ , lze po limitním přechodu $\Delta\theta \rightarrow 0$ zapsat vztah (11) jako:

$$f_{\Theta}^{**}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f_{\Theta}^{*}(\theta) \prod_{i=1}^n f'(x_i|\theta)}{\int_{\Theta} f_{\Theta}^{*}(\xi) \prod_{j=1}^n f'(x_j|\xi) d\xi} = C(x_1, x_2, \dots, x_n) f_{\Theta}^{*}(\theta) \prod_{i=1}^n f'(x_i|\theta) \quad (12)$$

kde C je konstanta normalizující hustotu pravděpodobnosti $f_{\Theta}^{**}(\cdot)$. Z posteriorní hustoty $f_{\Theta}^{**}(\cdot)$ (12) se integrací získá aktualizovaná hustota pravděpodobnosti vyšetřované vlastnosti:

$$f''(x) = \int_{\Theta} f'(x|\xi) f_{\Theta}^{**}(\xi) d\xi \quad (13)$$

á aktualizovaná distribuční funkce:

$$F''(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f''(x) dx = \int_{\Theta} F'(x|\xi) f_{\Theta}^{**}(\xi) d\xi \quad (14)$$

Hustota pravděpodobnosti (13) a distribuční funkce (14) popisují aktualizované rozdělení pravděpodobností vyšetřované veličiny vyplývající z předchozích znalostí a výsledků zkoušek.

KONJUGOVANÁ ROZDĚLENÍ

Hodnocení vlastností materiálu založené na vztazích (12) až (14) může být výpočetně náročné [5], a to především při větších dimenzích vektoru Θ . Proto se při praktických aplikacích ve stavebnictví nejčastěji používají konjugovaná rozdělení $f^{*}(\cdot)$ a $f_{\Theta}^{*}(\cdot)$ [3,5,18], pro která se integrace ve vztahu (12) provede v uzavřeném tvaru.

Konjugovaná rozdělení se v inženýrských aplikacích pro svou jednoduchost používají vždy, pokud nejsou k dispozici žádné podklady pro stanovení sdružené hustoty $f_{\Theta}^{*}(\cdot)$ [18]. Pokud jsou však k dispozici data naznačující vhodnost jiných rozdělení, mají se tato rozdělení použít bez ohledu na výpočetní komplikace [18].

Při praktických aplikacích se obvykle uvažují dvě náhodné charakteristiky Θ - průměr m^s a směrodatná odchylka s^s . Pro m^s se uvažuje průměrná hodnota m^s a variační koeficient $v(m^s)$, pro s^s průměrná hodnota s^s a variační koeficient $v(s^s)$. Variační koeficienty $v(m^s)$ a $v(s^s)$ mohou být známy z předchozích zkušeností, nebo se stanoví z následujících vztahů [2,3]:

$$v(m^s) = v^s / \sqrt{n^s}, v(s^s) = 1 / \sqrt{2v^s} \quad (15)$$

kde n^s označuje hypotetický rozsah souboru pro určení průměru m^s a v^s hypotetický počet stupňů volnosti s^s . Vstupní parametry $v(m^s)$ a $v(s^s)$ (nebo alternativně n^s a v^s) se často stanoví na základě expertního odhadu nebo informací v dostupné literatuře (viz oddíl 5).

Pokud se pro apriorní rozdělení veličiny X uvažuje normální rozdělení, je výhodné popsat apriorní hustotu pravděpodobnosti charakteristik m^s a s^s v následujícím tvaru [3,7]:

$$f_{\Theta}^{*}(\mu, \sigma) = \frac{\sigma^{-(1+v^s+\delta(n^s))} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[v^s s^{s^2} + n^s(\mu - m^s)^2]}}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \sigma^{-(1+v^s+\delta(n^s))} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[v^s s^{s^2} + n^s(\mu - m^s)^2]} d\sigma d\mu} = C \sigma^{-(1+v^s+\delta(n^s))} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[v^s s^{s^2} + n^s(\mu - m^s)^2]} \quad (16)$$

kde μ a σ představují hodnoty charakteristik m' a s' a $\delta(n')$ je funkce definovaná následujícím způsobem: $\delta(n' = 0) = 0$; $\delta(n' > 0) = 1$ ($n' < 0$ zde nemá význam). Za těchto předpokladů má posteriorní hustota pravděpodobnosti $f_{\Theta}^{**}(\bullet)$ (12) stejný tvar jako apriorní hustota ve vztahu (16), avšak místo apriorních m' , s' , n' a v' se uplatní posteriorní parametry získané ze vztahů [3,4,7]:

$$\begin{aligned} n'' &= n + n' \\ v'' &= v + v' + \delta(n') \\ m'' &= (mn + m'n') / n'' \\ s''^2 &= (v s^2 + v' s'^2 + n m^2 + n' m'^2 - n'' m''^2) / v'' \end{aligned} \quad (17)$$

Výpočet vztahu (12) se tedy zjednoduší na vyčíslení posteriorních charakteristik podle (17). Aktualizovaná hustota pravděpodobnosti $f^{**}(\bullet)$ a distribuční funkce $F^{**}(\bullet)$ se získá ze vztahů (13) a (14). Kvantil se opět odhadne prostřednictvím Studentova t -rozdělení podobně jako ve vztazích (2) a (3), avšak s využitím aktualizovaných charakteristik m'' , s'' , n'' a v'' :

$$x_p = m'' + q_t(p, v'') \sqrt{(1 + 1/n'')} s'' \quad (18)$$

Pokud se pro apriorní model veličiny X uvažuje lognormální rozdělení s počátkem v nule a hustota pravděpodobnosti charakteristik $f_{\Theta}^{**}(\bullet)$ podle (16), lze s výhodou využít skutečnosti, že veličina $Y = \ln|X|$ má normální rozdělení. Průměr λ a směrodatná odchylka ζ veličiny Y se stanoví ze vztahů:

$$\begin{aligned} \lambda' &= \ln(m') - 0,5 \ln[1 + (v')^2]; \quad \zeta' = \sqrt{\{\ln[1 + (v')^2]\}} \\ \lambda &= \frac{\sum \ln(x_i)}{n}; \quad \zeta = \sqrt{\frac{\sum [\ln(x_i) - \lambda]^2}{n-1}} \end{aligned} \quad (19)$$

Podobně jako pro normální rozdělení se s využitím parametrů n , v , n' a v' ze vztahu (17) odvodí aktualizované charakteristiky λ'' , ζ'' , n'' a v'' [7] a kvantil se odhadne ze vztahu:

$$x_p = e^{\lambda'' + q_t(p, v'') \sqrt{(1 + 1/n'')} \zeta''} \quad (20)$$

Poznamenejme, že při dlouhodobých sledováních se může ukázat, že směrodatnou odchylku s' lze považovat za známou (a tudíž deterministickou). V takovém případě platí $v(s') \rightarrow 0$ a $v' \rightarrow \infty$ (15) a také $q_t(p; +\infty) = u_p$. Vztahy (18) a (20) lze tedy přepsat jako:

$$x_p = m'' + u_p \sqrt{(1 + 1/n'')} s''; \quad x_p = e^{\lambda'' + u_p \sqrt{(1 + 1/n'')} \zeta''} \quad (21)$$

Při dlouhodobých sledováních může vyšetřovaná veličina X vykazovat konstantní variační koeficient v' , který může být považován za známý. O průměru m' se dále předpokládá, že je náhodná veličina se známým průměrem m' a variačním koeficientem $v(m')$. Pokud se pro apriorní model X použije lognormální rozdělení s počátkem v nule s parametry λ' a ζ' , tak ze vztahu (19) plyne, že parametr $\zeta' = \sqrt{\ln[1 + v'^2]}$ je deterministická veličina. Průměr a směrodatná odchylka parametru $\lambda' = \ln(m') - 0,5 \ln[1 + v'^2]$ se přibližně stanoví ze vztahů:

$$m_{\lambda'} \approx \ln(m') - 0,5 \ln[1 + v(m')^2] - 0,5 \ln[1 + v'^2]; \quad s_{\lambda'} \approx \sqrt{[\ln(1 + v(m')^2)]} \quad (22)$$

Pokud lze parametr λ popsat normálním rozdělením $N(m_{\lambda'}, s_{\lambda'})$, pak má posteriorní hustota pravděpodobnosti $f_{\Theta}^{**}(\bullet)$ opět normální rozdělení, avšak s parametry $m_{\lambda''}$ a $s_{\lambda''}$ [18]:

$$m_{\lambda''} = \frac{m_{\lambda'} \frac{\zeta'^2}{n} + s_{\lambda'}^2 \ln(m)}{\frac{\zeta'^2}{n} + s_{\lambda'}^2}; \quad s_{\lambda''} = \sqrt{\frac{s_{\lambda'}^2 \frac{\zeta'^2}{n}}{\frac{\zeta'^2}{n} + s_{\lambda'}^2}} \quad (23)$$

Aktualizovaná hustota pravděpodobnosti $f''(\bullet)$ a distribuční funkce $F''(\bullet)$ se získá ze vztahů (13) a (14) s uvážením hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce lognormálního rozdělení s parametry λ'' a ζ'' .

V tomto oddílu jsou uvedeny pouze základní druhy konjugovaných rozdělení, která se obvykle používají k popsání vlastností stavebních materiálů. Další druhy jsou uvedeny např. v knihách [6,18,19]. Poznamenejme, že pokud nelze popsat veličinu X a její parametry Θ konjugovanými rozděleními, je nezbytné vztahy (12) až (14) vyčísřit numericky. V některých případech však může být obtížné dosáhnout přijatelné přesnosti běžnými postupy [5] a je nutné využít speciální simulační metody jako např. Markov Chain Monte Carlo Simulation nebo Importance Sampling [19,21].

NUMERICKÝ PŘÍKLAD

V předchozích oddílech se provádí teoretický rozbor aktualizace modelu vlastnosti na základě materiálových zkoušek. Popsané postupy se v tomto oddíle názorně ukáží na příkladu stanovení charakteristické a návrhové hodnoty meze kluzu oceli.

Zadání

Ověřuje se spolehlivost prvku, který je součástí ocelové konstrukce vybudované v 70. letech 20. století. Cílem rozboru je na základě dostupných dat stanovit charakteristickou a návrhovou hodnotu meze kluzu konstrukční oceli.

Charakteristická hodnota x_k se v souladu s ČSN EN 1990 [8] uvažuje jako 5% dolní kvantil příslušného rozdělení pravděpodobností, $p_k = 0,05$. Návrhová hodnota x_d se stanoví jako dolní kvantil, který odpovídá pravděpodobnosti $p_d = P(X \leq x_d) = 1,2 \times 10^{-3}$ [8,20].

Předpokládá se, že při hodnocení existující konstrukce je k dispozici původní projektová dokumentace, z které vyplývá, že nosný prvek je z oceli třídy S235. Z rozsáhlých pravděpodobnostních analýz vlastností konstrukčních ocelí vyráběných v Československu a v České republice [11,12,13] se stanovily následující statistické charakteristiky meze kluzu oceli třídy S235:

$$m' \approx 294 \text{ MPa}; \quad v' \approx 0,1 \quad (24)$$

Poznamenejme, že podobné údaje lze stanovit i z podkladů JCSS [7], kde se však uvádí poněkud nižší variační koeficient, $v' = 0,08$. Uvažovaná hodnota 0,1 může být tedy v některých případech poněkud konzervativní. Pro apriorní model meze kluzu se dále uvažuje normální nebo lognormální rozdělení s počátkem v nule (značeno LN0).

V Tab. 1 se uvádí orientační charakteristiky pro apriorní modely vybraných základních veličin, přesnější hodnoty se uvádějí např. v dokumentu JCSS [7]. Poznamenejme, že charakteristické hodnoty se obvykle určí z platných normových předpisů.

Tab. 1. Orientační charakteristiky apriorních modelů.

Veličina	Charakteristická hodnota	Rozdělení	Průměr m'	Variační koef. v'
Pevnost betonu v tlaku	f_{ck}	LN0, N	$\sim \frac{f_{ck}}{1-2v'}$	0,1 - 0,2
Mez kluzu betonářské výztuže	f_{yk}	LN0, N	$\sim \frac{f_{yk}}{1-2v'}$	0,05
Mez kluzu konstrukční oceli	f_{yk}	LN0, N	$\sim \frac{f_{yk}}{1-2v'}$	0,08 – 0,12
Stálé zatížení	g_k	N	g_k	0,1
Užitné zatížení	q_k	Gum, gama	$0,25q_k$	0,8

Gum značí Gumbelovo rozdělení maximálních hodnot [4].

Dokument JCSS [7] doporučuje při použití Bayesovského postupu považovat apriorní informaci uvedenou v Tab. 1 pro konstrukční oceli za relativně „silnou“. To popisuje vysoká doporučená hodnota hypotetického počtu vzorků $n' \approx 50$, na základě kterých se stanovil průměr m' . Zde se při dalším výpočtu uvažuje konzervativně $n' = 5$.

Pro variační koeficient apriorní směrodatné odchylky $v(s')$ pro pevnost betonu v tlaku doporučuje dokument ISO 2394 [2] hodnotu 0,3, která je dále (opět konzervativně) uvažována pro vyšetřovanou mez kluzu oceli S235. S uvážením charakteristik (24) plyne ze vztahů (15):

$$v(m') = 0,0447; v' = 5 \quad (25)$$

Poznamenejme, že hypotetický počet stupňů volnosti ν' směrodatné odchylky s' je zaokrouhlen dolů na celá čísla.

Apriorní informace jsou doplněny malým počtem zkoušek, $n = 3$ a $\nu = n - 1 = 2$:

$$x_1 = 275 \text{ MPa}, x_2 = 261 \text{ MPa}, x_3 = 313 \text{ MPa} \quad (26)$$

Ze vztahů (1) vychází:

$$m = 283 \text{ MPa}, s = 26,9 \text{ MPa}, v = 0,0951 \quad (27)$$

Z numerických hodnot (27) se zdá, že mez kluzu zkoušené oceli dobře odpovídá apriornímu modelu. V případě pochybností by se statistickými postupy měla ověřit hypotéza, že zkoušený materiál pochází ze základního souboru popsaného apriorním modelem. Tzv. testování hypotéz je podrobně vysvětleno ve skriptech [10].

Odhad kvantilů podle EN 1990 [8] a kvantily teoretického modelu

Nejprve se odhadnou kvantily na základě výsledků zkoušek podle dokumentů [1,8]. Za předpokladu normálního rozdělení ze vztahů (2) a (3) pro charakteristickou a návrhovou hodnotu plyne:

$$\begin{aligned}x_{kN} &= 283 \times [1 + q_t(0,05;2)\sqrt{(1 + 1/3) \times 0,0951}] = 283 \times [1 - 3,37 \times 0,0951] = 192 \text{ MPa} \\x_{dN} &= 283 \times [1 + q_t(0,0012;2)\sqrt{(1 + 1/3) \times 0,0951}] = 283 \times [1 - 23,5 \times 0,0951] = -350 \text{ MPa} \quad (28)\end{aligned}$$

Ukazuje se, že při malém počtu zkoušek nelze návrhovou hodnotu určit s využitím vztahů (2) a (3). V uvažovaném případě se návrhová hodnota stanoví s využitím dílčího součinitele γ_m :

$$x_{dN} = x_{dk} / \gamma_m = 192 / 1,15 = 167 \text{ MPa} \quad (29)$$

Pro rozdělení LN0 se kvantily odhadnou ze vztahu (4):

$$\begin{aligned}x_{kLN0} &= 283 \times e^{-3,37\sqrt{\ln(1+0,0951^2)} - 0,5\ln(1+0,0951^2)} = 206 \text{ MPa} \\x_{dLN0} &= 283 \times e^{-23,5\sqrt{\ln(1+0,0951^2)} - 0,5\ln(1+0,0951^2)} = 30 \text{ MPa}\end{aligned} \quad (30)$$

Charakteristická hodnota pro rozdělení LN0 vychází vyšší než pro normální rozdělení. Tato skutečnost je způsobena tím, že rozdělení LN0 je definováno pouze pro kladné hodnoty a má kladnou šikmost. Jeho hodnoty jsou proto v porovnání s normálním rozdělením vychýleny doprava (směrem k vyšším hodnotám). Opět se ukazuje, že v tomto případě nelze návrhovou hodnotu stanovit na základě tří zkoušek a je potřeba využít součinitel γ_m :

$$x_{dN} = x_{dk} / \gamma_m = 206 / 1,15 = 179 \text{ MPa} \quad (31)$$

Pokud jsou k dispozici dostatečné a věrohodné předchozí informace a nevznikají pochyby o skutečných vlastnostech vyšetřovaného materiálu, lze kvantily odhadnout přímo z apriorních modelů. Tento postup se však využívá spíše výjimečně, např. pokud jsou známy výsledky předchozích zkoušek materiálu a je možné vyloučit změnu vlastností během provozu konstrukce. Ze vztahů (5) a (6) vyplývá:

$$\begin{aligned}x_{kN} &= 294 + u_{0,05} \times 0,1 \times 294 = 294 + (-1,645) \times 29,4 = 245 \text{ MPa} \\x_{dN} &= 294 + u_{1,2 \times 10^{-3}} \times 0,1 \times 294 = 294 + (-3,040) \times 29,4 = 204 \text{ MPa} \\x_{kLN0} &= 294 e^{-1,645\sqrt{\ln(1+0,1^2)} - 0,5\ln(1+0,1^2)} = 248 \text{ MPa} \\x_{dLN0} &= 294 e^{-3,040\sqrt{\ln(1+0,1^2)} - 0,5\ln(1+0,1^2)} = 216 \text{ MPa}\end{aligned} \quad (32)$$

S využitím dílčího součinitele γ_m vychází:

$$x_{dN} = 245 / 1,15 = 213 \text{ MPa}; \quad x_{dLN0} = 248 / 1,15 = 215 \text{ MPa}; \quad (33)$$

Z výsledků (32) a (33) je opět patrné, že kvantily rozdělení LN0 jsou vyšší než u normálního rozdělení. Významnější rozdíl (6 %) je především mezi návrhovými hodnotami stanovenými podle vztahů (5) a (6).

Odhad kvantilů prostřednictvím Bayesovského postupu

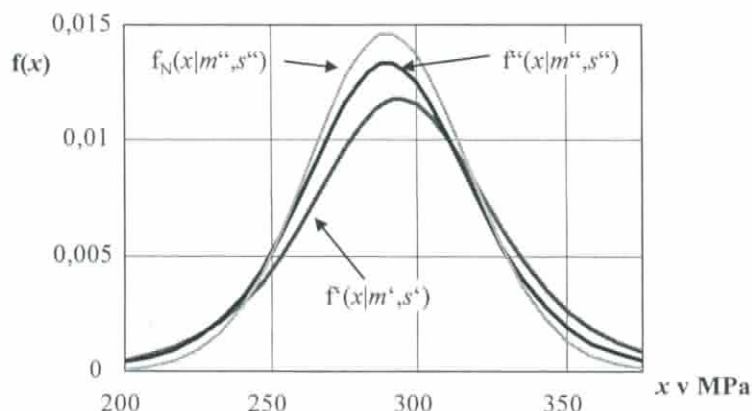
V předchozí části se ukazuje, že kvantily stanovené z apriorního modelu jsou významně vyšší než odhady kvantilů stanovené z malého počtu zkoušek. V takovémto případě tedy může být výhodné využít Bayesovský postup. Nejdříve se uvažuje normální rozdělení veličiny X a hustota pravděpodobnosti charakteristik m' a s' podle vztahu (16). Ze vztahů (17) se stanoví aktualizované parametry:

$$\begin{aligned}n'' &= 3 + 5 = 8 \\v'' &= 2 + 5 + 1 = 8\end{aligned} \quad (34)$$

$$m'' = (283 \times 3 + 294 \times 5) / 8 = 290 \text{ MPa}$$

$$s'' = \sqrt{[(2 \times 26,9^2 + 5 \times 29,4^2 + 3 \times 283^2 + 5 \times 293,8^2 - 8 \times 289,7^2) / 8]} = 27,3 \text{ MPa}$$

Na Obr. 2 jsou naznačeny hustoty pravděpodobnosti – apriorní $f'(x|m',s')$, posteriorní $f''(x|m'',s'')$ stanovené integrací podle vztahu (13) a normálního rozdělení $f_N(x|m'',s'')$.



Obr. 2. Apriorní a posteriorní hustoty pravděpodobnosti.

Obr. 2 naznačuje, že posteriorní hustota pravděpodobnosti $f''(x|m'',s'')$ nemá normální rozdělení, které se předpokládá u apriorního modelu.

Ze vztahu (18) a s využitím součinitele spolehlivosti γ_m se odhadnou kvantily:

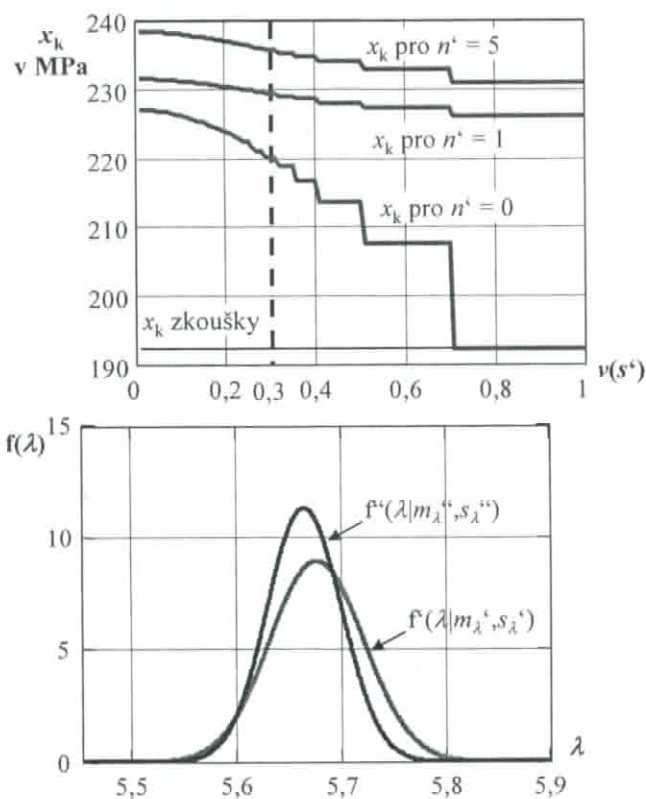
$$x_k = 290 + q_t(0,05;8)\sqrt{(1 + 1/8) \times 27,3} = 290 - 1,86\sqrt{(1 + 1/8) \times 27,3} = 236 \text{ MPa}$$

$$x_d = 290 + q_t(0,0012;8)\sqrt{(1 + 1/8) \times 27,3} = 290 - 4,37\sqrt{(1 + 1/8) \times 27,3} = 163 \text{ MPa} \quad (35)$$

$$x_d = 236 / 1,15 = 205 \text{ MPa}$$

Z výsledků (35) je patrné, že návrhová hodnota stanovená z aktualizovaného modelu se může významně lišit od hodnoty určené prostřednictvím součinitele γ_m . V takovýchto případech je důležité obezřetně uvážit, která hodnota se použije při hodnocení konstrukce. V uvažovaném případě se zdá, že hodnota 205 MPa poskytuje lepší odhad skutečné návrhové pevnosti. Hodnota stanovená z kvantilu Studentova t -rozdělení může být poměrně konzervativní vzhledem k malému počtu stupňů volnosti, $\nu' = 8$. Poznamenejme, že charakteristická hodnota stanovená Bayesovským postupem je o více než 20 % vyšší než charakteristická hodnota stanovená na základě zkoušek.

Na Obr. 3 je znázorněna závislost charakteristické hodnoty x_k na variačním koeficientu apriorní směrodatné odchylky $\nu(s')$, který je v příkladu uvažován poněkud konzervativně hodnotou 0,3 doporučenou pro pevnost betonu v tlaku.



Obr. 3. Závislost charakteristické hodnoty x_k na variačním koeficientu $v(s')$.

Obr. 4. Apriorní a posteriorní hustota pravděpodobnosti parametru λ .

Obr. 3 naznačuje, že hledaný kvantil se pro $n' = 5$ příliš s variačním koeficientem směrodatné odchylky $v(s')$ nemění (změny kolem 5 %). Podobný závěr platí v uvažovaném případě zřejmě pro $n' \geq 1$. Pro $n' = 0$ je naopak závislost na $v(s')$ významná a odhad kvantilu se může lišit až o 20 %.

Pokud se pro apriorní model vyšetřované vlastnosti předpokládá rozdělení LN0, pak se nejprve vyčíslí ze vztahu (19) charakteristiky transformované veličiny Y :

$$\begin{aligned} \lambda' &= \ln(294) - 0,5 \ln[1 + (0,1)^2] = 5,678; \zeta' = \sqrt{\{\ln[1 + (0,1)^2]\}} = 0,10 \\ \lambda &= \frac{\ln(275) + \ln(261) + \ln(313)}{3} = 5,642; \\ \zeta &= \sqrt{\frac{[\ln(275) - 5,645]^2 + [\ln(261) - 5,645]^2 + [\ln(313) - 5,645]^2}{2}} = 0,0935 \end{aligned} \quad (36)$$

Ze vztahu (17) vyplývá:

$$\begin{aligned} n'' &= 3 + 5 = 8 \\ v'' &= 2 + 5 + 1 = 8 \\ \lambda'' &= (5,642 \times 3 + 5,678 \times 5) / 8 = 5,665 \\ \zeta'' &= \sqrt{[(2 \times 0,0935^2 + 5 \times 0,0998^2 + 3 \times 5,642^2 + 5 \times 5,678^2 - 8 \times 5,665^2) / 8]} = 0,0933 \end{aligned} \quad (37)$$

Kvantily se odhadnou ze vztahu (20):

$$\begin{aligned}
 x_k &= e^{5,6645 + q_i(0,05;8)\sqrt{(1+1/8)0,0933}} = e^{5,6645 - 1,86\sqrt{(1+1/8)0,0933}} = 240 \text{ MPa} \\
 x_d &= e^{5,6645 + q_i(0,0012;8)\sqrt{(1+1/8)0,0933}} = e^{5,6645 - 4,37\sqrt{(1+1/8)0,0933}} = 187 \text{ MPa} \\
 x_d &= 240 / 1,15 = 209 \text{ MPa}
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

Pokud lze variační koeficient v' považovat za konstantní (v případě dlouhodobých sledování) a apriorní rozdělení veličiny X je LN0, odhadnou se apriorní charakteristiky průměru transformované veličiny Y ze známého průměru m' a jeho variačního koeficientu $v(m')$ podle vztahu (22):

$$\begin{aligned}
 m_{\lambda'} &\approx \ln(294) - 0,5 \ln[1 + 0,0447^2] - 0,5 \ln[1 + 0,1^2] = 5,677; \\
 s_{\lambda'} &\approx \sqrt{[\ln(1 + 0,0447^2)]} = 0,0447
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

Parametr ζ' je deterministická veličina:

$$\zeta' \approx \sqrt{[\ln(1 + 0,1^2)]} = 0,10
 \tag{40}$$

Pro normální rozdělení parametru λ' , $N(m_{\lambda'}, s_{\lambda'})$, má posteriorní hustota pravděpodobnosti opět normální rozdělení s parametry $m_{\lambda''}$ a $s_{\lambda''}$ podle vztahů (23):

$$m_{\lambda''} = \frac{5,677 \frac{0,10^2}{3} + 0,0447^2 \ln(283)}{\frac{0,10^2}{3} + 0,0447^2} = 5,665; \quad s_{\lambda''} = \sqrt{\frac{0,0447^2 \frac{0,10^2}{3}}{\frac{0,10^2}{3} + 0,0447^2}} = 0,0353
 \tag{41}$$

Aktualizovaná hustota pravděpodobnosti $f''(\bullet)$ a distribuční funkce $F''(\bullet)$ se získá ze vztahů (13) a (14) s uvážením hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce lognormálního rozdělení s parametry λ'' a ζ'' . Obr. 4 ukazuje apriorní a posteriorní hustotu pravděpodobnosti parametru λ (obě normální rozdělení).

Z aktualizované distribuční funkce meze kluzu lze stanovit charakteristickou a návrhovou hodnotu:

$$x_k = 242 \text{ MPa}; \quad x_d = 209 \text{ MPa}; \quad x_d = 242 / 1,15 = 211 \text{ MPa}
 \tag{42}$$

V tomto případě se ukazuje, že návrhová hodnota stanovená z distribuční funkce se přibližně shoduje s návrhovou hodnotou určenou s využitím součinitele γ_m . Charakteristická hodnota se liší pouze nepatrně od hodnoty stanovené pro předchozí variantu výpočtu, kde se uvažovala apriorní hustota pravděpodobnosti charakteristik Θ podle vztahu (16).

Porovnání odhadu kvantilů

V předchozích částech je uveden výpočet kvantilů vycházející z různých předpokladů. V Tab. 2 se porovnávají stanovené charakteristické a návrhové hodnoty.

Tab. 2. Stanovené charakteristické a návrhové hodnoty v MPa.

Varianta výpočtu	Normální rozdělení X'			Lognormální rozdělení s počátkem v nule X''		
	x_k	x_d (teoretic. mod.)	x_k / γ_m	x_k	x_d (teoretic. mod.)	x_k / γ_m
Ze zkoušek (EN 1990)	19	-	167	206	-	179
Kvantil apriorního	24	204	213	248	216	215

rozdělení	5					
Apriorní hustota Θ podle (16)	23 6	163	206	240	187	209
Znamý var. koeficient v'	-	-	-	242	209	211

Z Tab. 2 je patrné, že odhady kvantilů stanovené na základě tří zkoušek mohou být značně konzervativní v porovnání s odhady stanovenými prostřednictvím Bayesovského postupu. Naopak stanovení kvantilu pouze s využitím apriorního rozdělení může vést k mírně nadhodnoceným odhadům. Při výpočtu návrhové hodnoty na základě Bayesovského postupu je dále potřebné rozhodnout, zda je vhodné použít teoretický model nebo součinitel γ_m . Obvykle se při malém počtu zkoušek doporučuje stanovit návrhovou hodnotu jako podíl charakterické hodnoty a součinitele γ_m .

ZÁVĚRY

Stanovení charakteristických a návrhových hodnot vlastností materiálů je důležitým krokem hodnocení spolehlivosti existujících konstrukcí, při kterém se uplatňují různé pravděpodobnostní postupy. Poznatky o vlastnostech materiálu se často získávají prostřednictvím omezeného počtu zkoušek – malý počet zkoušek však může vést ke značným statistickým nejistotám a následně ke konzervativním odhadům charakteristické, nebo návrhové hodnoty. Proto je vhodné využít apriorní (předchozí) informace o vlastnostech materiálu a tyto znalosti kombinovat s výsledky zkoušek na základě Bayesovských postupů.

V obecných případech může být hodnocení prostřednictvím Bayesovských postupů výpočetně náročné. Významné zjednodušení přináší použití tzv. konjugovaných rozdělení. Při použití Bayesovského postupu lze při nízkém počtu zkoušek a věrohodných apriorních informacích dosáhnout významného zvýšení charakteristických nebo návrhových hodnot v porovnání s odhady založenými pouze na výsledcích zkoušek. Je však potřeba zdůraznit, že nesprávné apriorní informace mohou vést ke špatným posteriorním (aktualizovaným) modelům a proto se při použití Bayesovských postupů doporučuje zvýšená obezřetnost.

Numerický příklad stanovení charakteristické a návrhové hodnoty meze kluzu oceli S235 naznačuje, že odhady založené na různých apriorních modelech (normální rozdělení nebo lognormální s počátkem v nule) se navzájem významně neliší. Obecně se však doporučuje kriticky zvážit, zda má být návrhová hodnota stanovena z charakteristické hodnoty a součinitele spolehlivosti materiálu γ_m , nebo zda má být stanovena přímo z aktualizovaného modelu vlastnosti. Ukazuje se, že pro případ třech zkoušek mohou být odhady kvantilů klasickými statistickými postupy značně konzervativní v porovnání s odhady stanovenými aktualizací apriorních informací na základě Bayesovských postupů.

PODĚKOVÁNÍ

Příspěvek byl vypracován v Kloknerově ústavu, ČVUT v Praze v rámci řešení projektu GAČR 103/06/1562 Tvorba zásad pro ověřování trvanlivosti konstrukcí a materiálů podporovaného Grantovou agenturou ČR.

LITERATURA

- [1] ČSN ISO 13822 Zásady navrhování konstrukcí – Hodnocení existujících konstrukcí, ČNI 2005
- [2] ISO 2394, General principles on reliability for structures. 1998. Zavedená v ČR jako ČSN ISO 2394 Obecné zásady spolehlivosti konstrukcí, ČNI, 2003.
- [3] ISO 12491 Statistical methods for quality control of building materials and components. 1997.
- [4] Holický, M. & Marková, J. Základy teorie spolehlivosti a hodnocení rizik. Skripta ČVUT. Vydavatelství ČVUT, 2005.
- [5] Řeřicha, P. Použití Bayesovské analýzy dat a nejistoty při výpočtu spolehlivosti. In Vejvoda S., Novák D., Melcher J. a Štěpánek P. (eds.), sborník příspěvků konference PPK2006 – Pravděpodobnost porušování konstrukcí, 3. a 4. října 2006, Brno. Nakladatelství VUT Brno, 2006, 10 p.
- [6] Probabilistic Assessment of Existing Structures (publication of the Joint Committee on Structural Safety, ed. D. Diamantidis), RILEM Publications S.A.R.L., 2001.
- [7] Joint Committee on Structural Safety: JCSS Probabilistic Model Code, 2005, <<http://www.jcss.ethz.ch/>>.
- [8] EN 1990 Basis of structural design. European CEN, 04/2002. Zavedená v ČR jako ČSN EN 1990 Eurokód: Zásady navrhování konstrukcí, ČSNI, 2004.
- [9] Holický, M., Jung, K. & Sýkora M. Základy statistických metod. In Holický, M., Novotný, B., Sýkora, M. (eds.), Zásady hodnocení existujících konstrukcí: sborník příspěvků semináře, Praha 12. dubna 2006. Nakladatelství ČVUT, 2006, 14 p., <www.konstrukce.cvut.cz>.
- [10] Vorlíček, M., Holický, M. & Špačková, M. Pravděpodobnost a matematická statistika pro inženýry. Skripta ČVUT, Nakladatelství ČVUT, Praha, 1984.
- [11] Mrázik, A. Teória spoľahlivosti oceľových konštrukcií, Veda SAV, Bratislava, 1987.
- [12] Mrázik, A. Statistické zhodnotenie mechanických vlastností konstrukčných oceľí vyrábaných v rokoch 1971 az 1975, Inženýrské stavby 9, 1977.
- [13] Holický, M. & Vorlíček, M. Základy statistické teorie meze kluzu konstrukční oceli. Zpráva k projektu GAČR 103/95/1437 Výzkum a optimalizace faktorů spolehlivosti

nosných ocelových konstrukcí na základě skutečných vlastností kovových materiálů.
Praha, Kloknerův ústav ČVUT, 1996, 22 s.

- [14] Holický, M. & Vorlíček, M. Statistical procedures for design assisted by testing, IABSE Colloquium Delft, IABSE Report, Vol. 74, Delft: Delft University, 1996.
- [15] Holický, M. & Vorlíček, M. General Lognormal Distribution in Statistical Quality Control, In: Application of Statistics and Probability, ICASP 7, Paris, June 1995. A.A Balkema, 1995, pp. 719 - 724.
- [16] Nowak, A.S. & Collins, K.R. Reliability of Structures. Mc GRAW HILL, 2000.
- [17] Schneider J. Introduction to Safety and Reliability of Structures. IABSE, 1997.
- [18] Ang, A.H.-S. & Tang, W.H. Probabilistic concepts in engineering planning and design. John Wiley and Sons, New York, 1975.
- [19] Gelman, A., Carlin, J.B., Stern, H.S. & Rubin, D.B. Bayesian data analysis (2nd edition). Chapman&Hall, 2004.
- [20] Holický, M. et al. *Příručka pro hodnocení existujících konstrukcí: sborník příspěvků semináře*. Praha: Česká technika, 2007, s. 175. ISBN 978-80-01-03790-4. <www.konstrukce.cvut.cz>.
- [21] BECK, J.L. & Au, S.-K. Bayesian Updating of Structural Models and Reliability using Markov Chain Monte Carlo Simulation, Journal of Engineering Mechanics, Volume 128, Issue 4, pp. 380-391, April 2002.

Název: Využití Bayesovských metod k řešení praktických problémů
zpracování dat pro ocenění spolehlivosti (sborník přednášek)

Kolektiv autorů

počet stran: 87

Tisk:

Vydala: Česká společnost pro jakost, Novotného lávka 5, 116 68 Praha 1
www.csq.cz

ISBN 978-80-02-01979-4