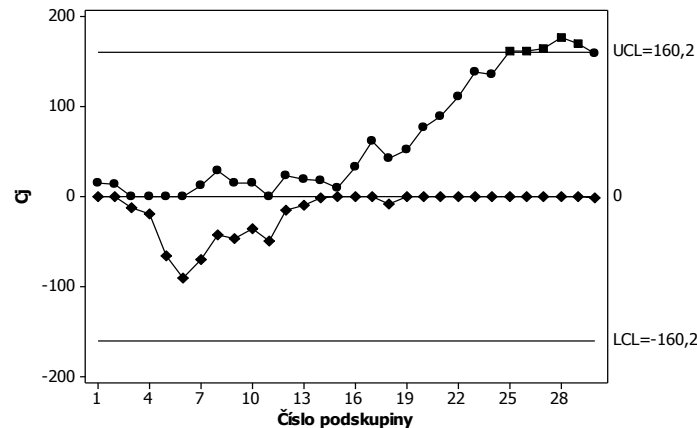


Regulační diagramy CUSUM



Darja Noskievičová

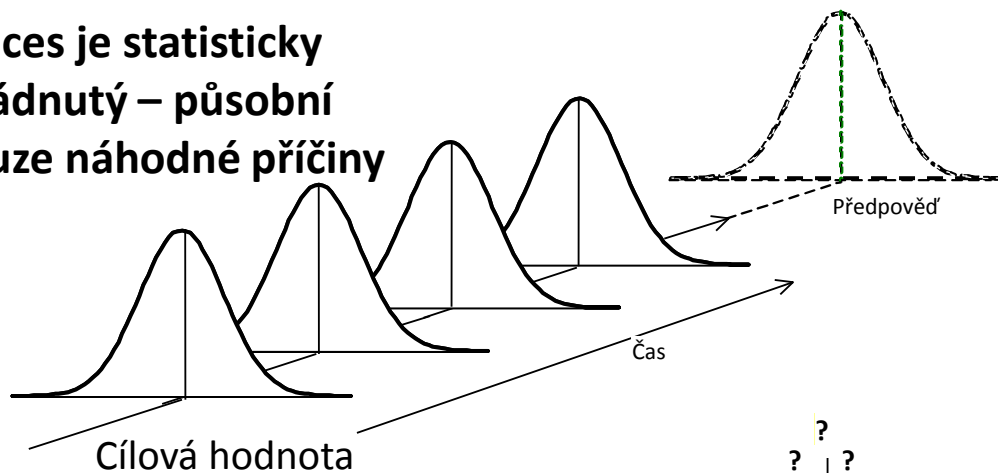
Katedra managementu kvality

Fakulta metalurgie a materiálového inženýrství

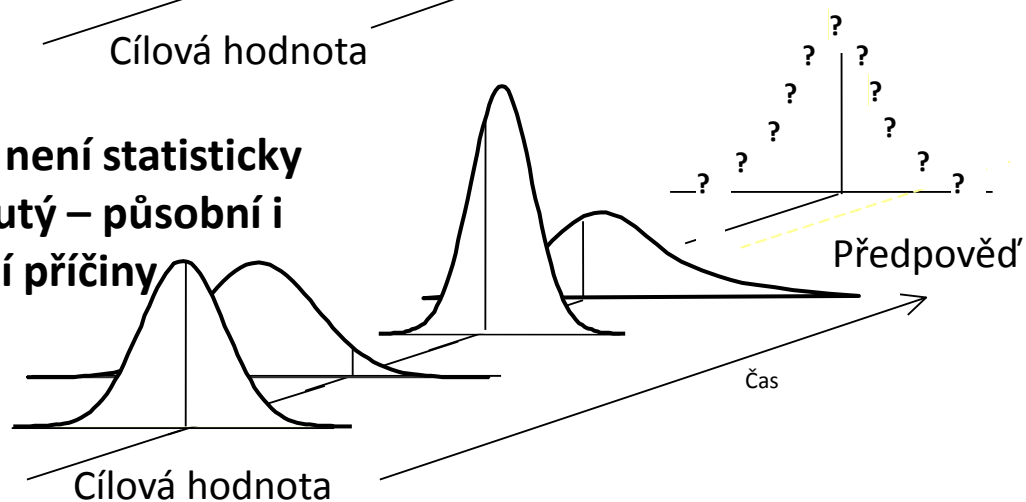
VŠB - TU Ostrava

Princip statistické regulace procesu

Proces je statisticky zvládnutý – působí pouze náhodné příčiny



Proces není statisticky zvládnutý – působí i zvláštní příčiny



Princip statistické regulace procesu

Náhodné příčiny

- proces je opakovatelný a kvalita jeho výstupů je předvídatelná;
- proces je ve statisticky zvládnutém (stabilním) stavu;
- typ a parametry rozdělení znaku kvality či parametru procesu, pomocí něhož hodnotíme variabilitu procesu, jsou známy a nemění se

Princip statistické regulace procesu

Zvláštní příčiny

představují vliv zdrojů variability, které za běžných podmínek na proces nepůsobí

- **proces není reprodukovatelný a kvalita jeho výstupů není předvídatelná;**
- **proces není statisticky zvládnutý (stabilní)**
- **typ a parametry rozdělení znaku kvality či parametru procesu, pomocí něhož hodnotíme variabilitu procesu, se v čase mění**

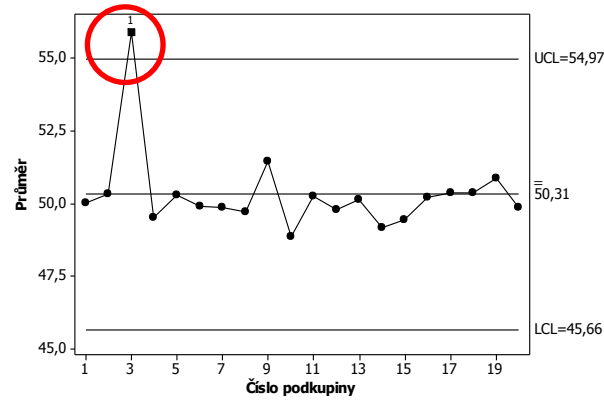
Princip statistické regulace procesu

Zvláštní příčiny

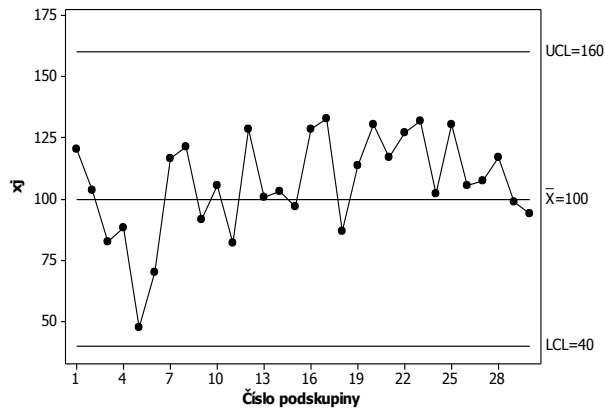
- příčiny sporadické
- příčiny **přetrvávající**

Projevy sporadické a přetrvávající příčiny v regulačním diagramu

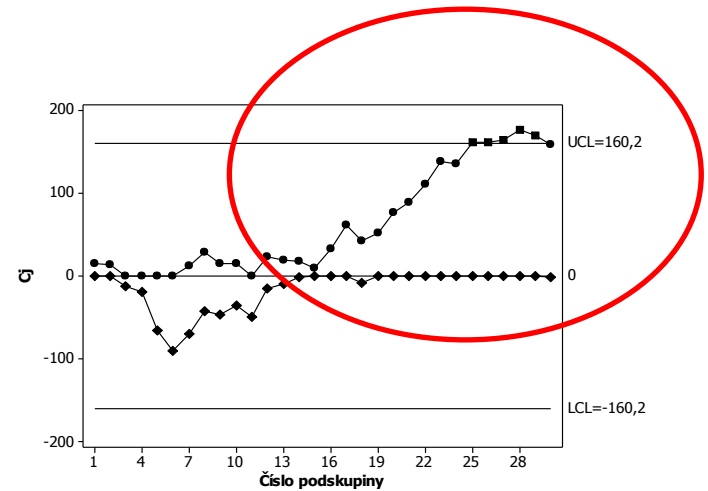
Příčiny sporadické



Příčiny přetrvávající

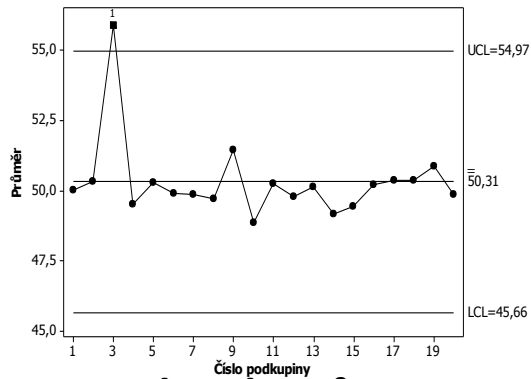


Shewhartův diagram



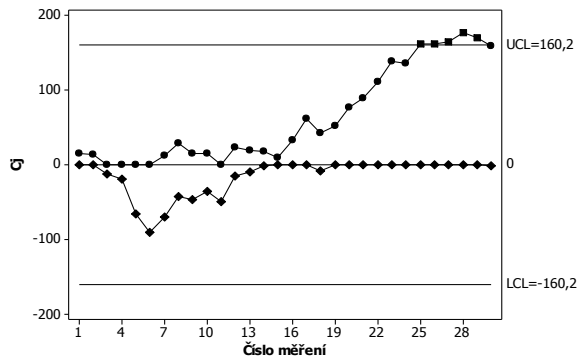
CUSUM

Vazba mezi druhem zvláštní příčiny a typem regulačního diagramu



**Shewhartův
regulační diagram**

Zvláštní příčiny sporadické - větší změny



Metoda CUSUM

Zvláštní příčiny přetrvávající - změny střední a malé velikosti

Paměť regulačních diagramů

Sheuhartův regulační diagram

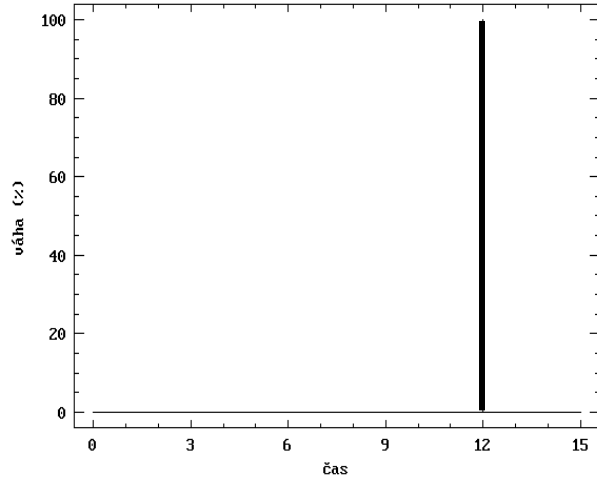


Diagram CUSUM

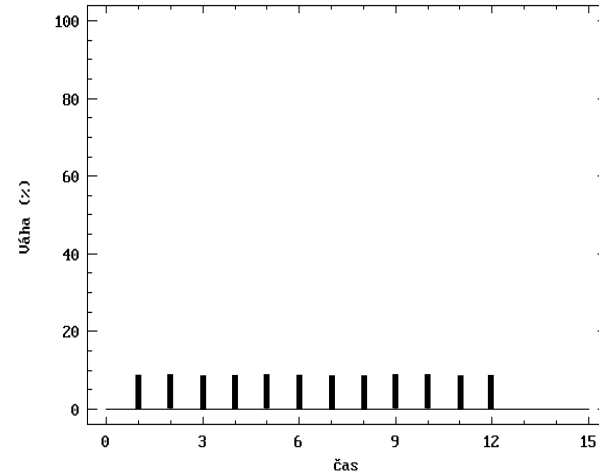
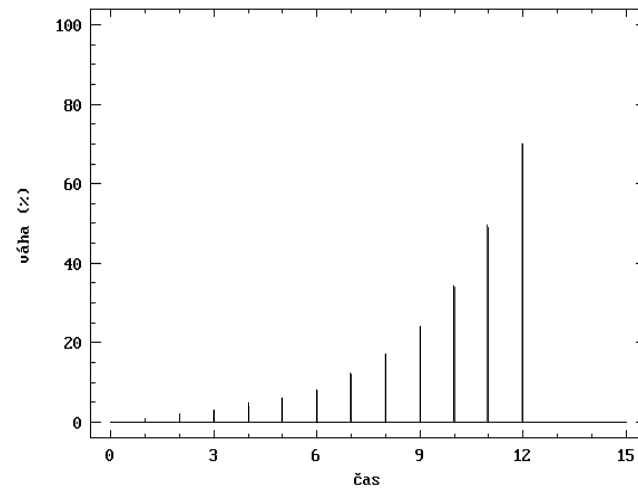


Diagram EWMA



Fáze statistické regulace procesů



1. Přípravná fáze

2. Fáze zabezpečení statisticky zvládnutého procesu

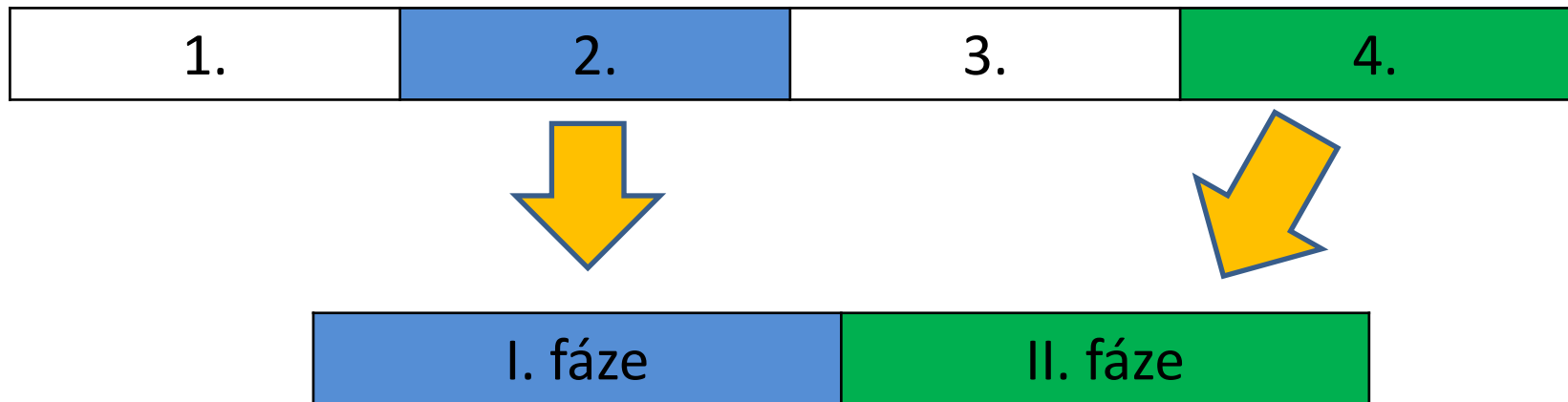
3. Fáze analýzy a zabezpečení způsobilosti procesu

4. Fáze dlouhodobé statistické regulace procesu

Fáze statistické regulace procesů

2. Fáze zabezpečení statisticky zvládnutého procesu

4. Fáze dlouhodobé statistické regulace procesu



(Montgomery, 2013)

Fáze statistické regulace procesů

CuSum (Tabular) Individuals Chart Options

Type of Study:

- Initial Study
- Control to Standard

Decision interval (h): Sigma

Headstart: Sigma

Reference value (k): Sigma

Target: Sigma

ARL at sigma = 465.7

Mean Control Limits:

- Two-sided
- Upper only
- Lower only
- Normalize

Scale Control Limits:

- Two-sided
- Upper only
- Lower only

Control to Standard

Specify Parameters:

Mean:

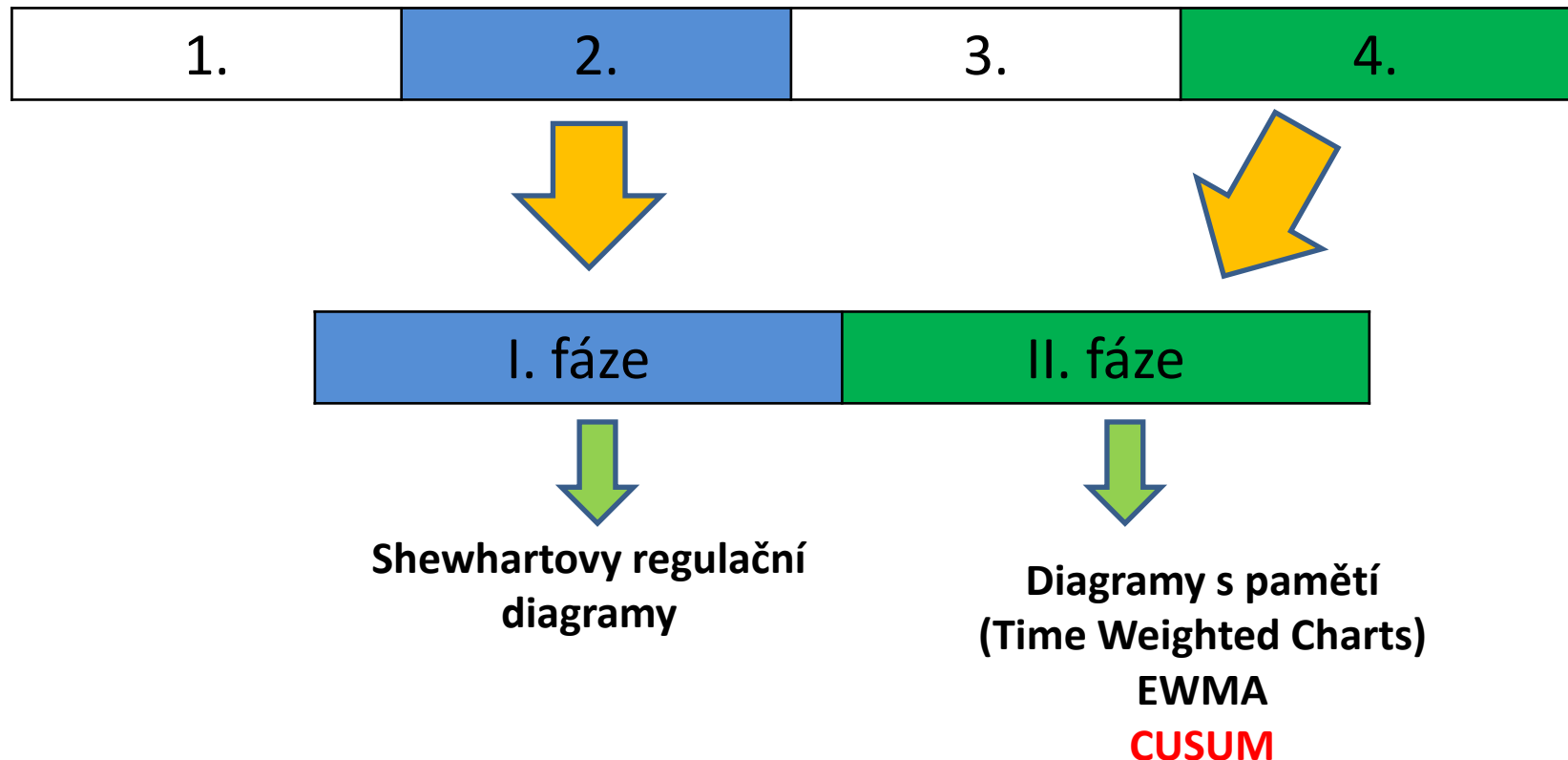
Std. Dev.:

OK
Cancel
Exclude...
Transform...
Design...
Help

Fáze statistické regulace procesů

2. Fáze zabezpečení statisticky zvládnutého procesu

4. Fáze dlouhodobé statistické regulace procesu



Metoda CUSUM

- metoda kumulovaných součtů (*Cumulative Sum Control Charts*)
- CUSUM - SPC měřením
 - pro individuální hodnoty
 - pro průměry
 - pro regulaci variability
- CUSUM - SPC srovnáváním
 - pro počet neshod či
 - počet neshodných jednotek

Princip metody CUSUM

- kumulace odchylek cílové hodnoty od hodnoty použité výběrové charakteristiky pro všechny dosud provedené výběry.

Příklad

- Diagram CUSUM pro individuální hodnoty

$$C_j = \sum_{i=1}^j (x_i - \mu_0) \quad C_0 = 0$$

x_i - i -tá naměřená hodnota

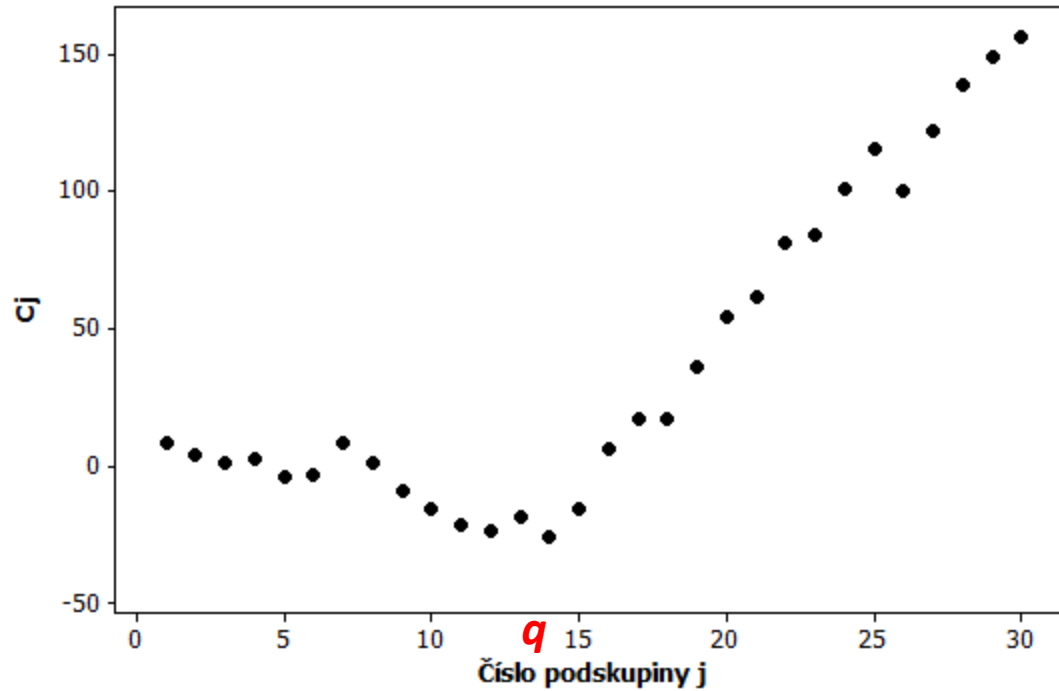
μ_0 - cílová střední hodnota procesu

Interpretace grafu CUSUM

Grafická forma metody CUSUM - body o souřadnicích $[j, C_j]$:

- a) Proces udržován na cílové hodnotě - body v diagramu zachovávají směr přibližně rovnoběžný s osou x**
- b) Náhlá změna střední hodnoty regulované veličiny přibližně v době, kdy byl odebrán q -tý výběr, a tato změna přetrvává - počínaje bodem $[q, C_q]$ rostoucí či klesající lineární trend**
- c) Střední hodnota procesu roste nebo klesá a ještě se nestabilizovala (v procesu existuje trend) - body v diagramu tvoří křivku viditelně se zakřívující nahoru nebo dolů.**

Interpretace grafu CUSUM

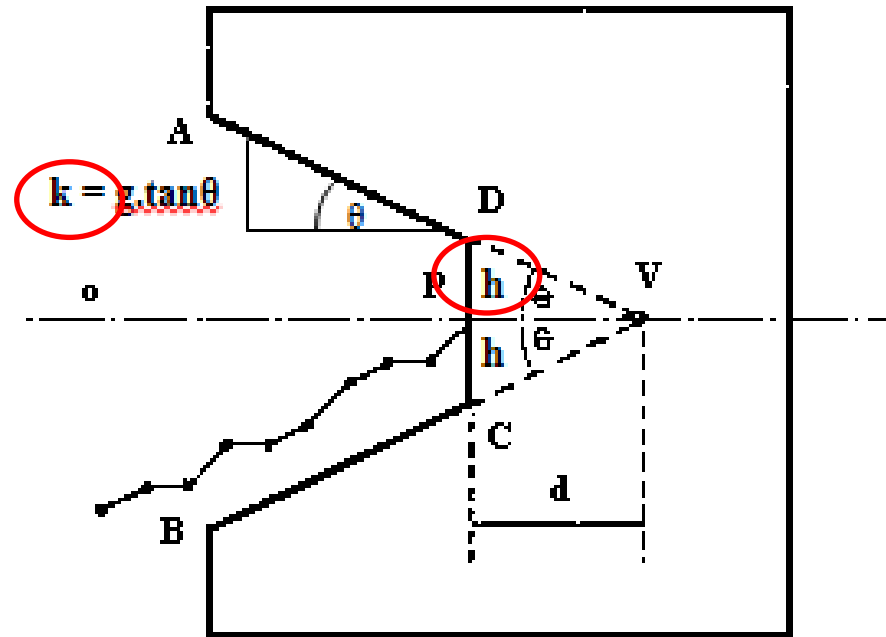


Situace b)

Rozhodovací kritéria

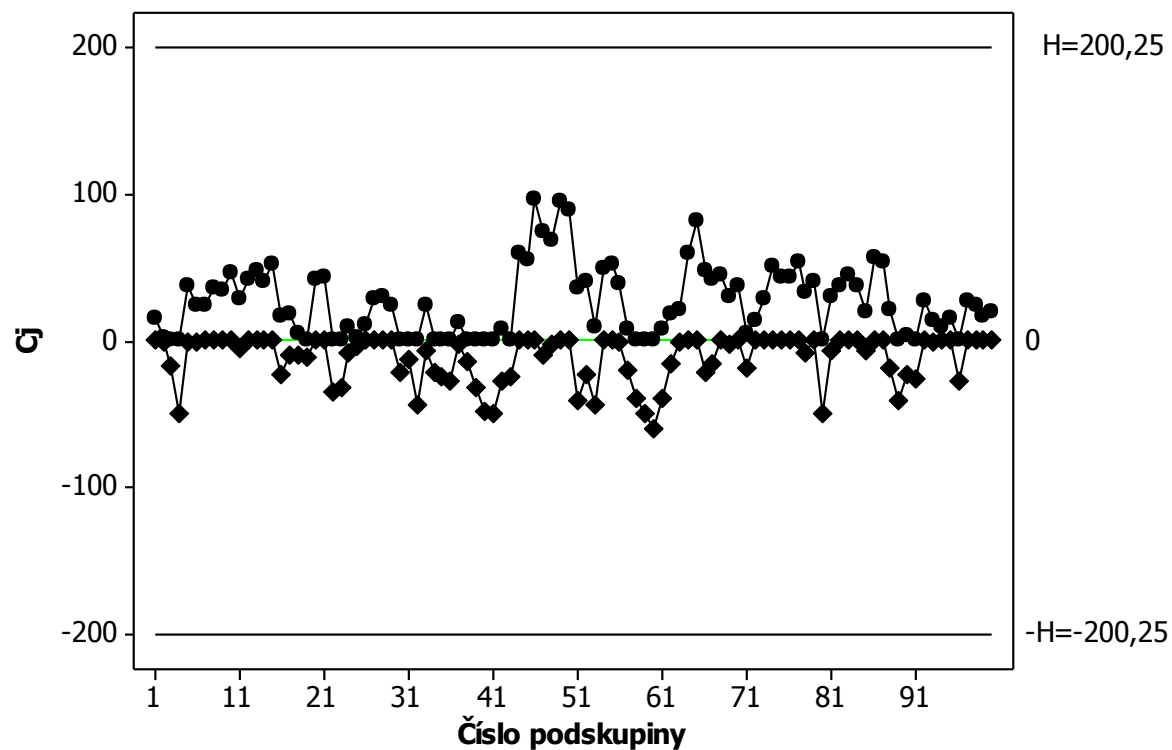
- **Dva základní typy kritérií, pomocí nichž lze určit, zda proces je statisticky zvládnutý či není**
- **rozhodovací maska**
- **rozhodovací meze**

Diagram CUSUM s rozhodovací maskou



Dvoustranná rozhodovací V-maska

CUSUM s rozhodovacími mezemi



Vlastnosti CUSUM

Účinnost metody CUSUM

Charakteristika ARL

- $ARL(0)$ - dostatečně velké
- $ARL(\delta)$ co nejmenší

Výpočet -

jednoduchá a dostatečně přesná aproximace navržená Siegmundem (1985)

Vlastnosti CUSUM

Účinnost diagramů CUSUM

Výpočet ARL

$$ARL^+ = \frac{\exp(-2\Delta b) + 2\Delta b - 1}{2\Delta^2} \quad \text{pro } \Delta = \delta - k$$

$$ARL^- = \frac{\exp(-2\Delta b) + 2\Delta b - 1}{2\Delta^2} \quad \text{pro } \Delta = -\delta - k$$

δ - normovaná velikost posunu střední hodnoty procesu;

pro $\Delta = 0$ platí

$$ARL^+ = b^2 \quad \text{nebo} \quad ARL^- = b^2$$

dvoustranné CUSUM $\frac{1}{ARL} = \frac{1}{ARL^+} + \frac{1}{ARL^-}$

Tyto výpočty používá SW Statgraphics

Výpočet ARL - příklad

Máme určit hodnotu $ARL(0)$ pro dvoustranné CUSUM s parametry $k = 0,5$ a $h = 4,77$.

Protože máme stanovit hodnotu $ARL(0)$, je $\delta = 0$ a $\Delta = -0,5$ pro ARL^+ i ARL^-

$$b = 4,77 + 1,166 = 5,936$$

$$ARL^+ = ARL^- = 742$$

$$\frac{1}{ARL} = \frac{1}{742} + \frac{1}{742} = \frac{2}{742}$$

Výpočet ARL - příklad

Máme určit hodnotu $ARL(\delta)$ pro dvoustranný CUSUM s parametry $k = 0,5$ a $h = 4,77$ pro odchylku velikosti $\delta = 0,5$; $b = 4,77 + 1,166 = 5,936$.

$$ARL^+ = 5,936^2 = 35,2$$

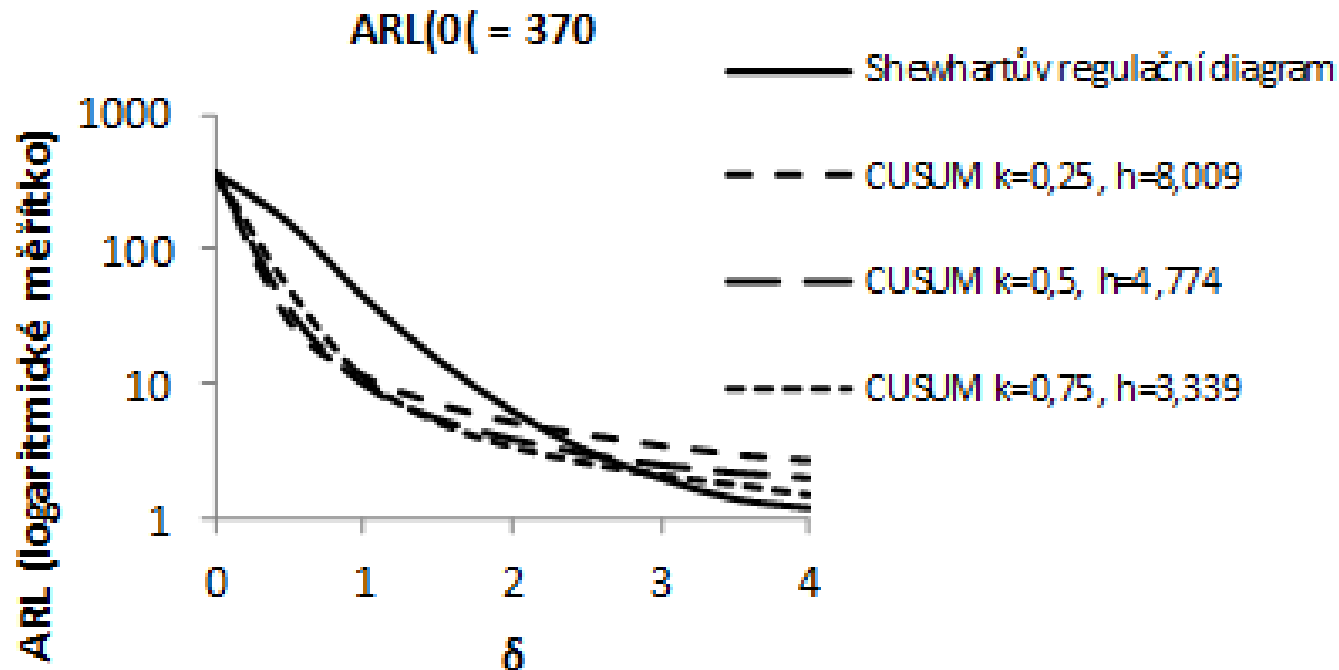
$$ARL^- = 71\,593,74$$

$$ARL(0,5) = 35,2$$

Vlastnosti CUSUM

Srovnání diagramů CUSUM a Shewhartových regulačních diagramů

Diagramy CUSUM jsou citlivější na posuny střední hodnoty malé a střední velikosti



Vlastnosti CUSUM

Srovnání diagramů CUSUM a Shewhartových regulačních diagramů

CUSUM indikuje posuny střední hodnoty malé a střední velikosti 2–5 rychleji (Pyzdek, 1992)

Tab. ARL pro Shewhartův diagram a diagramy CUSUM při různých kombinacích k a h

δ	Shewhartův regulační diagram pro individuální hodnoty	CUSUM diagram pro individuální hodnoty $k = 0,25$ $h = 8,009$	CUSUM diagram pro individuální hodnoty $k = 0,5$ $h = 4,774$	CUSUM diagram pro individuální hodnoty $k = 0,75$ $h = 3,339$
0	370	370,4	370,3	370,3
0,5	155,2	28,8	35,3	49,9
1,0	43,9	11,4	9,9	10,9
1,5	15,0	7,1	5,5	5,2

Vlastnosti CUSUM

Srovnání CUSUM a Shewhartových regulačních diagramů

Lepší účinnost diagramu CUSUM zejména při malých hodnotách rizika zbytečného signálu α , a to tím více, čím je α menší

Hodnoty *ARL* pro CUSUM a Shewhartův diagram pro různá α

δ	α			
	0,01	0,0027	0,002	0,001
0,5	50,0	155,2	201,44	368,9
	21,7	35,3	38,9	47,9
1,0	17,3	43,9	54,6	90,8
	7,4	9,9	10,5	11,9
1,5	7,09	15,0	17,9	27,2
	4,3	5,5	5,8	6,5

ARL(δ) pro CUSUM -červeně

Vlastnosti CUSUM

Srovnání CUSUM a Shewhartových regulačních diagramů

CUSUM je jeho schopnost lépe zobrazit okamžik změny procesu a poskytnout informaci pro odhad její velikosti.

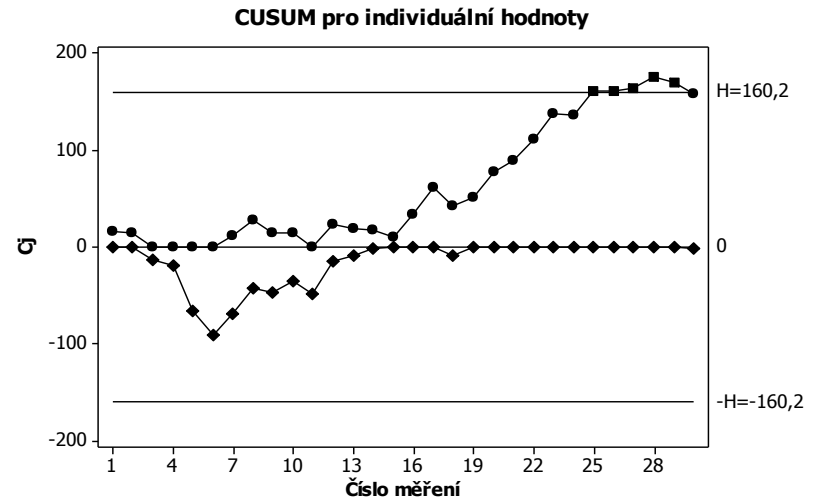
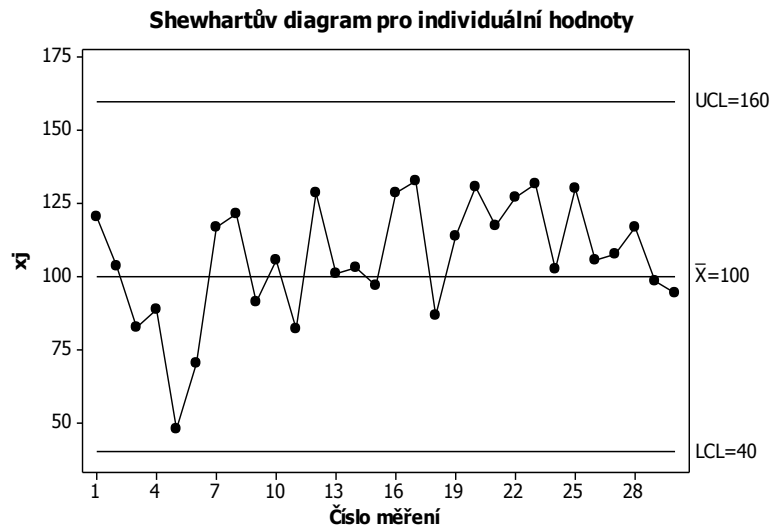


Diagram CUSUM s rozhodovacími mezemi

CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu

diagram pro individuální hodnoty x_j

diagram pro výběrové průměry \bar{x}

diagram CUSUM pro individuální hodnoty

- z hlediska detekce malých přetrvávajících změn účinnější než diagram pro průměry
- vhodný nástroj regulace spojitých výrobních procesů a diskrétních procesů, kde automatické měření každé vyrobené jednotky je nedílnou součástí výrobního procesu

Předpoklady:

- normální rozdělení s parametry μ a δ^2 (známé)
- nezávislost naměřených hodnot
- cílová hodnota = požadovaná úroveň střední hodnoty procesu μ_0

CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu

Statistika C_j

CUSUM pro individuální hodnoty

$$C_j^+ = \max[0, x_j - (\mu_0 + K) + C_{j-1}^+] \quad C_j^- = \max[0, (\mu_0 - K) - x_j + C_{j-1}^-] \quad C_0^+ = C_0^- = 0$$

CUSUM pro průměry

$$C_j^+ = \max[0, \bar{x}_j - (\mu_0 + K) + C_{j-1}^+] \quad C_j^- = \max[0, (\mu_0 - K) - \bar{x}_j + C_{j-1}^-] \quad C_0^+ = C_0^- = 0$$

<i>Observation</i>	<i>C+</i>	<i>N+</i>	<i>C-</i>	<i>N-</i>	<i>S+</i>	<i>N+</i>	<i>S-</i>	<i>N-</i>
1	4,77644	1	0,0	0	0,0304557	1	0,0	0
2	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,287624	1
3	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,754691	2
4	0,0	0	0,0	0	0,0	0	1,27367	3
5	0,0	0	0,936444	1	0,0	0	0,90796	4
6	0,0	0	0,0	0	0,0	0	1,42694	5
7	7,97644	1	0,0	0	0,484833	1	0,0	0
8	0,0	0	1,73644	1	0,00442836	2	0,0	0
9	0,0	0	6,07289	2	0,0	0	0,0	0

CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu

Statistika C_j

CUSUM pro individuální hodnoty

$$C_j^+ = \max[0, C_{j-1}^+ + (x_j - \mu_0 - K)] \quad C_j^- = \min[0, C_{j-1}^- + (x_j - \mu_0 + K)] \quad C_0^+ = C_0^- = 0$$

CUSUM pro průměry

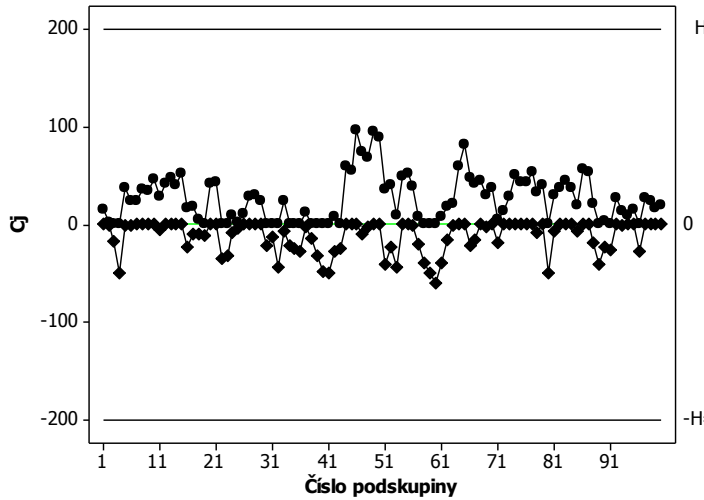
$$C_j^+ = \max[0, C_{j-1}^+ + (\bar{x}_j - \mu_0 - K)] \quad C_j^- = \min[0, C_{j-1}^- + (\bar{x}_j - \mu_0 + K)] \quad C_0^+ = C_0^- = 0$$

PPOI1	PPOI2	
3,787	0,0000	
0,000	0,0000	
0,000	0,0000	
0,000	0,0000	
0,000	-1,9870	
0,000	0,0000	
6,987	0,0000	
0,000	-2,7870	
0,000	-8,1740	
0,000	-10,1610	

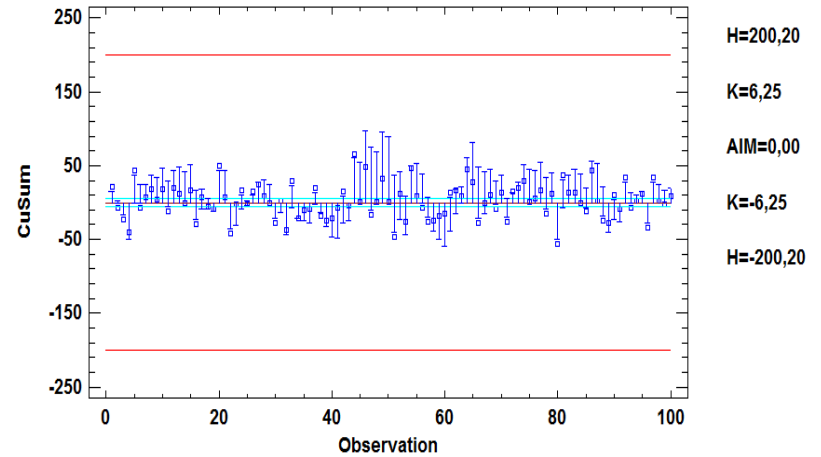
SW Minitab

CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu

Statistika C_j



SW Minitab



SW Statgraphics Centurion

CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu

Statistika C_j

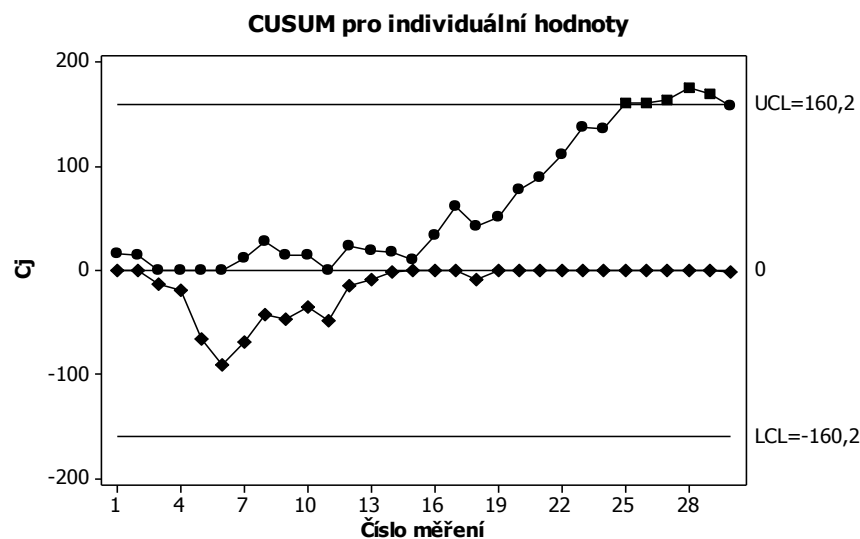
1. Je-li $C_j^+ \geq 0$, zaznamenáme do tabulky tuto hodnotu.
2. Je-li $C_j^+ < 0$, nahradí se tato hodnota nulou ($C_j^+ = 0$) a výpočet dalších sum začíná znovu od začátku
3. Je-li $C_j^- \leq 0$, zaznamenáme do tabulky tuto hodnotu.
4. Je-li $C_j^- > 0$, nahradí se tato hodnota nulou ($C_j^- = 0$) a výpočet dalších sum začíná znovu od začátku

CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu

Interpretace

Pokud některá hodnota překročí rozhodovací mez H nebo některá hodnota leží pod mezí $-H$

- proces je považován za statisticky nezvládnutý, tzn.,
- proces se s velkou pravděpodobností posunul na nežádoucí úroveň.



CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu

Standardizovaný CUSUM

$$S_j^+ = \max[0, S_{j-1}^+ + (u_j - k)]$$

$$S_j^- = \min[0, S_{j-1}^- + (u_j + k)]$$

$$S_j^+ = \max[0, u_j - k + S_{j-1}^+]$$

$$S_j^- = \max[0, -k - u_j + S_{j-1}^-]$$

u_j - standardizovaná hodnota naměřené hodnoty x_j

$$u_j = (x_j - \mu_0) / \sigma$$

CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu

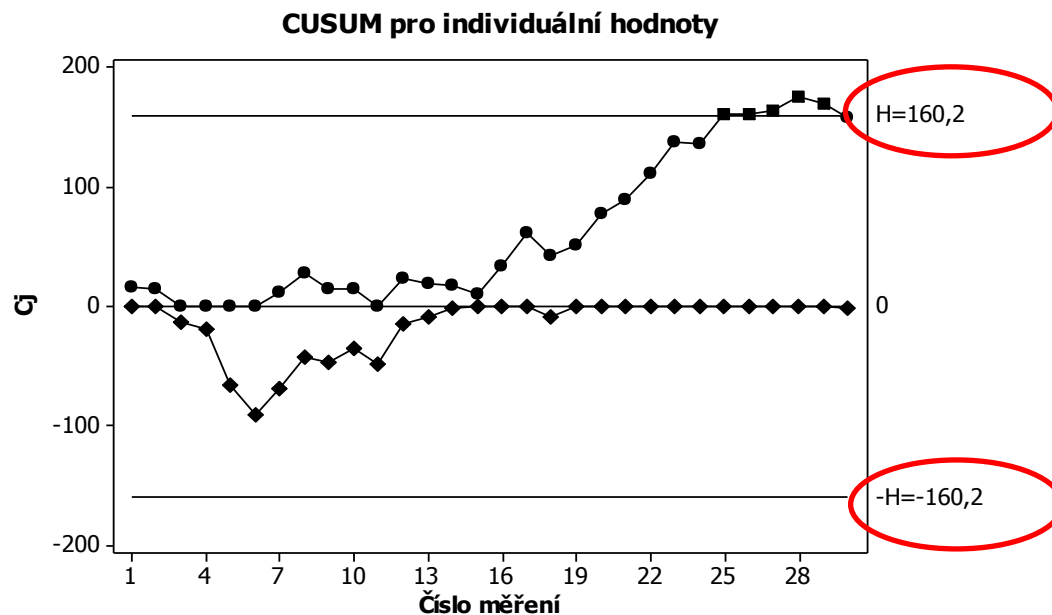
Návrh optimálního CUSUM

Optimální kombinace parametrů K (k) a H (h)

K referenční hodnota

$$C_j^+ = \max[0, x_j - (\mu_0 + K) + C_{j-1}^+] \quad C_j^- = \min[0, C_{j-1}^- + (x_j - \mu_0 + K)]$$

$$S_j^+ = \max[0, S_{j-1}^+ + (u_j - k)] \quad S_j^- = \min[0, S_{j-1}^- + (u_j + k)]$$



H (h) rozhodovací meze

CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu

Návrh optimálního CUSUM

Optimální hodnota K referenční hodnota

- zaručí nejkratší $ARL(\delta_{kr})$

$$K = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2} = \frac{\delta_{kr}}{2} \sigma$$

$$K = k\sigma$$

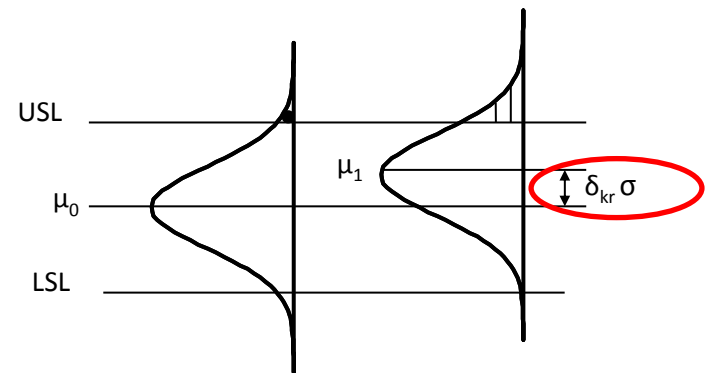
$$K = k\sigma / \sqrt{n}$$

μ_1 - nežádoucí (kritická) střední hodnota procesu

μ_0 - cílová střední hodnota procesu

$|\mu_1 - \mu_0|$ - absolutní velikost nežádoucího posunu střední hodnoty procesu, který lze rovněž vyjádřit ve standardizovaném tvaru počtem směrodatných odchylek procesu δ_{kr}

σ - cílová střední hodnota procesu



CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu

Návrh optimálního CUSUM

Optimální hodnota H

- zaručí v kombinaci se zvoleným K požadovanou hodnotu $ARL(0)$

$$H = h\sigma \quad H = h\sigma/\sqrt{n}$$

Hodnoty h jako funkce k a $ARL(0)$ pro oboustranný CUSUM

k	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0
ARL(0)	h							
50	4,419	2,850	2,037	1,532	1,164	0,861	0,587	0,329
100	5,597	3,502	2,481	1,874	1,458	1,131	0,847	0,582
250	7,267	4,389	3,080	2,323	1,830	1,466	1,164	0,892
370	8,010	4,773	3,339	2,516	1,986	1,604	1,293	1,017
500	8,585	5,070	3,538	2,665	2,105	1,708	1,390	1,110
1000	9,930	5,756	3,998	3,009	2,378	1,942	1,606	1,317

Tabulky – (Hawkins, 1998), (Lucas, 1976), (Hawkins, 1993)

Nomogramy - (Kemp, 1962), (Goe, 1971), (Lucas, 1976)

CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu

Návrh optimálního CUSUM

Řešení pomocí SW Statgraphics

CuSum (Tabular) Individuals Chart Options

Type of Study:

- Initial Study
- Control to Standard

Decision interval (h): Sigma

Headstart: Sigma

Reference value (k): Sigma

Target: Sigma

ARL at sigma = 370,4

Mean Control Limits:

- Two-sided
- Upper only
- Lower only
- Normalize

Scale Control Limits:

- Two-sided
- Upper only
- Lower only

Control to Standard

Specify Parameters:

Mean:

Std. Dev.:

Buttons: OK, Cancel, Exclude..., Transform..., Design..., Help

CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu

Návrh optimálního CUSUM

ARL hodnoty pro $k = 0,5$ a $h = 4$ nebo $h = 5$ (dvoustranný CUSUM)

	Varianta 1	Varianta 2
δ	$k = 0,5; h = 4$	$k = 0,5; h = 5$
0	167,7	465,7
0,25	74,2	139,5
0,5	26,6	38,0
0,75	13,3	17,0
1,0 d_{kr}	8,4	10,4
1,25	6,1	7,4
1,5	4,7	5,7
1,75	3,9	4,7
2,0	3,3	4,0

CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu

Návrh optimálního CUSUM

Příklad

- cílová hodnota μ_0 byla stanovena 1050 [N·s·m⁻²]
- hodnota směrodatné odchylky procesu $\sigma = 25$ [N·s·m⁻²]
- individuální měření
- na základě dřívějších měření lze předpokládat, že data mají normální rozdělení a jsou nezávislá
- Velikost nežádoucí změny: $0,5\sigma$, tj. $\delta_{kr} = 0,5$
- $ARL(0) = 370$

$$K = \frac{\delta_{kr}}{2} \sigma = \frac{0,5 \cdot 25}{2} = 6,25$$

$$k = \frac{K}{\sigma} = \frac{6,25}{25} = 0,25$$

$$h = 8,01$$

$$H = h\sigma = 8,01 \cdot 25 = 200,25$$

k	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0
ARL(0)	h							
50	4,419	2,850	2,037	1,532	1,164	0,861	0,587	0,329
100	5,597	3,502	2,481	1,874	1,458	1,131	0,847	0,582
250	7,267	4,389	3,080	2,323	1,830	1,466	1,164	0,892
370	8,010	4,773	3,339	2,516	1,986	1,604	1,293	1,017
500	8,585	5,070	3,538	2,665	2,105	1,708	1,390	1,110
1000	9,930	5,756	3,998	3,009	2,378	1,942	1,606	1,317

CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu

Návrh optimálního CUSUM

Řešení pomocí SW Statgraphics

CuSum (Tabular) Individuals Chart Options

Type of Study

Initial Study

Control to Standard

Decision interval (h): Sigma

Reference value (k): Sigma

Headstart: Sigma

Target: Sigma

ARL at sigma =

Mean Control Limits

Two-sided

Upper only

Lower only

Normalize

Scale Control Limits

Two-sided

Upper only

Lower only

Control to Standard

Specify Parameters:

Mean:

Std. Dev.:

OK

Cancel

Exclude...

Transform...

Design...

Help

CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu

Návrh optimálního CUSUM

ČSN ISO 7870-4

Tabulka 9

skupiny po třech běžných kombinací k a h :

Schéματα CS1

- kombinace vhodné v případě potřeby delších $ARL(0)$, tj. v oblasti 700 –1000

Schéματα CS2

- kombinace spojené s kratšími $ARL(0)$, tj. 140–200

v obou skupinách 3 kombinace

1. pro $\delta_{kr} < 0,75$
2. pro δ_{kr} od 0,75 do 1,5
3. pro $\delta_{kr} > 1,5$

Tabulka 10

- hodnoty ARL pro všechna schémata

CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu

FIR CUSUM

FIR (*Fast Initial Response*) CUSUM, tj. CUSUM s rychlou počáteční odezvou

- cílem zlepšit účinnost metody CUSUM při spuštění procesu, který není ve statisticky zvládnutém stavu
- počáteční hodnoty se C_0^+ a C_0^- se nepoloží rovny nule, ale určité nenulové hodnotě, zvané startovací hodnota (*headstart*)
- doporučuje se používat jako startovací hodnotu = $H / 2$ (Lucas, 1982)

CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu

FIR CUSUM

Příklad

- cílová hodnota $\mu_0 = 100$
- směrodatná odchylka procesu $\sigma = 2$
- rozsahu podskupiny $n = 5$
- nežádoucí střední hodnota procesu $\mu_1 = 110$
- $ARL(0) = 370$
- $K = 10 / 2 = 5$, $k = 5 / 20 / \sqrt{5} = 0,559$
- parametr h pak byl stanoven tak, aby se $ARL(0)$ rovnalo hodnotě 370, tj. $h = 4,346$; odtud $H = 38,9$
- střední hodnota procesu je od počátku rovna 110, tzn., že proces je statisticky nevládnutý

$$C_0^+ = H / 2, \text{ tj. } 19,436 \quad C_0^- = -H / 2, \text{ tj. } -19,436$$

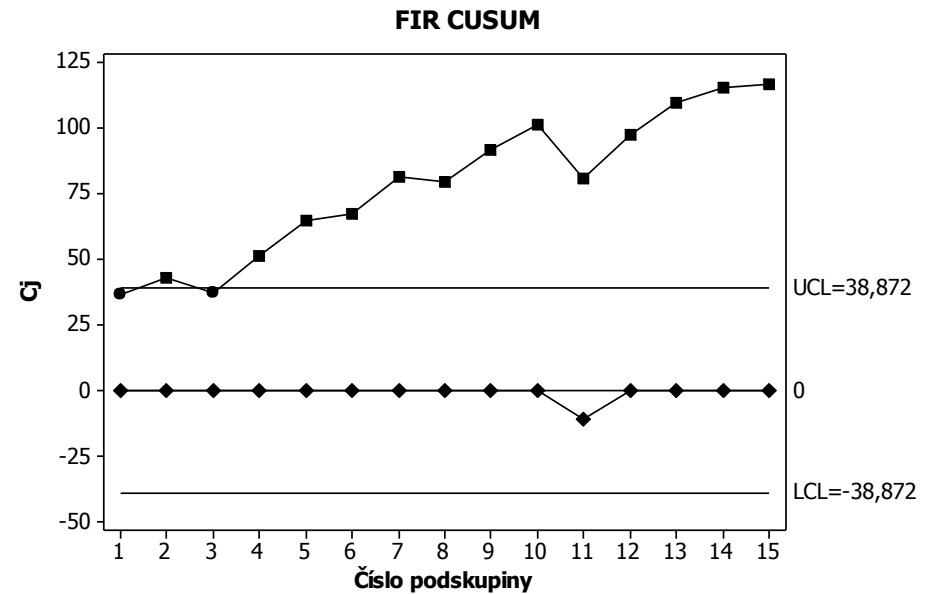
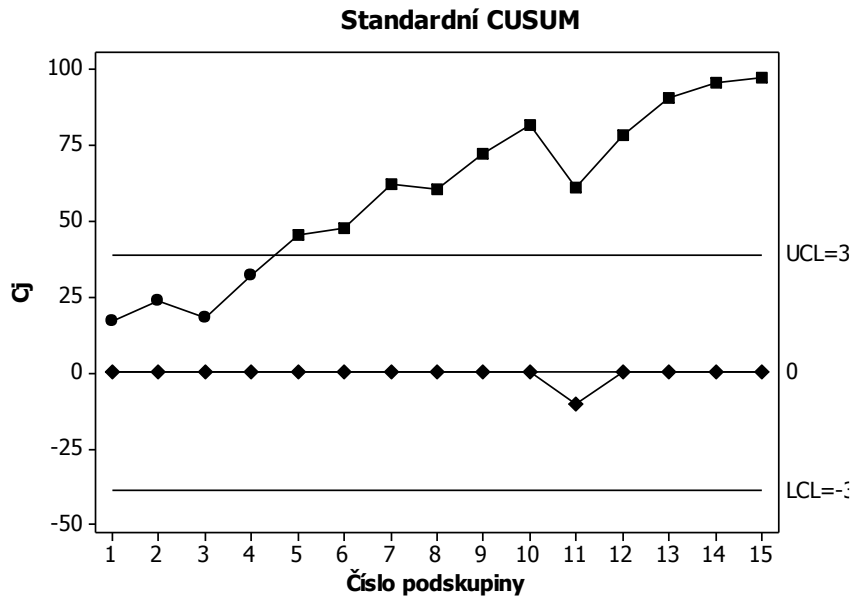
$$C_1^+ = \max(0; 19,436 + (122,0 - 100 - 5)) = 36,436$$

$$C_2^+ = \max(0; 36,436 + (111,4 - 100 - 5)) = 42,836$$

CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu

FIR CUSUM

Příklad



statisticky nezvládnutý proces

CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu

FIR CUSUM

Příklad

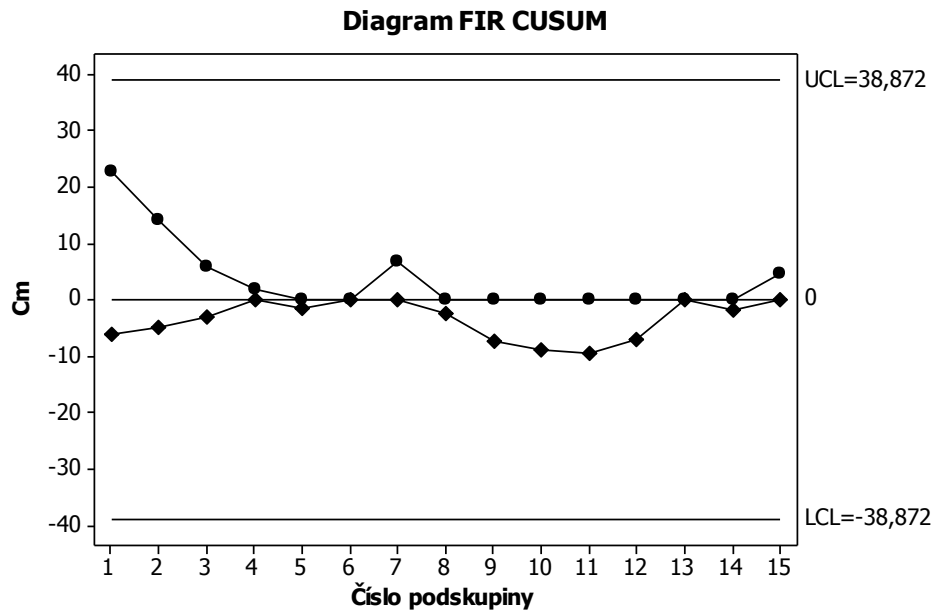


Diagram FIR CUSUM – statisticky zvládnutý proces

CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu

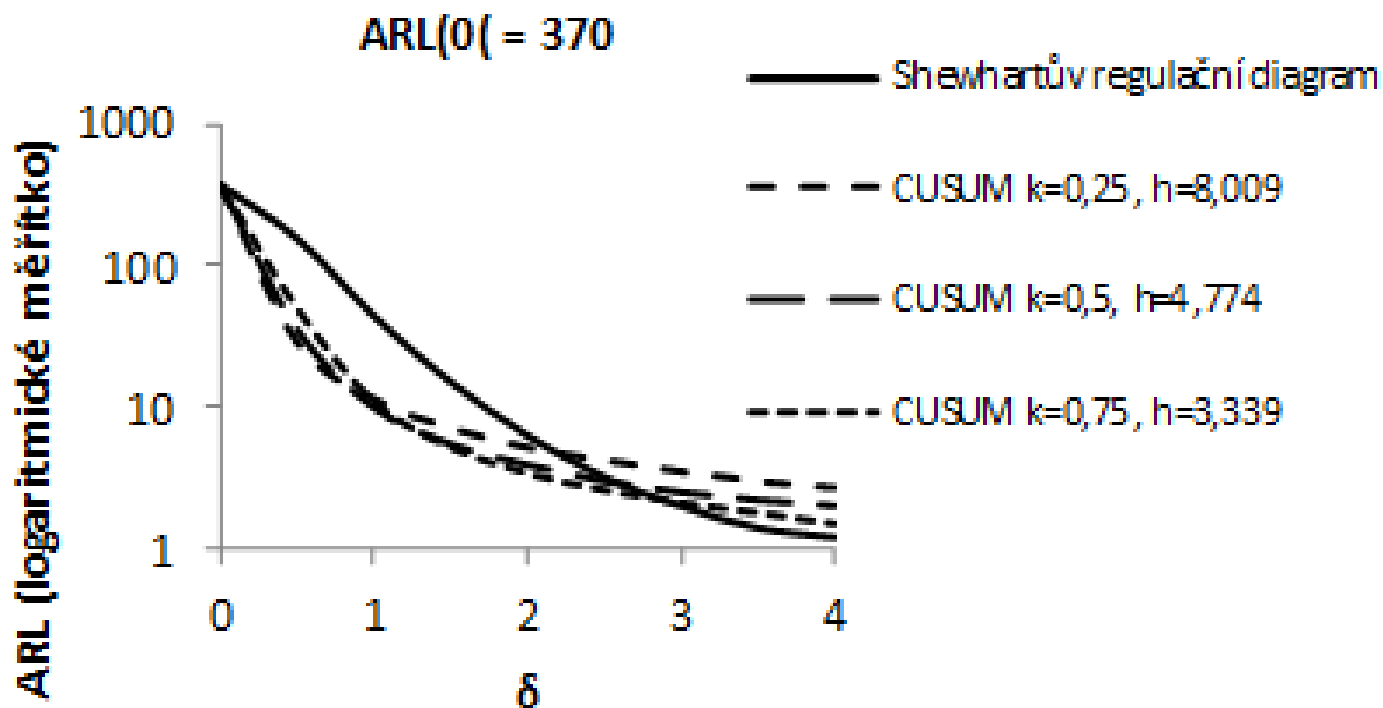
FIR CUSUM

Hodnoty ARL pro srovnatelné diagramy CUSUM (standardní a FIR) $n = 5$

Sl. 1	Sl. 2	Sl. 3	Sl. 4
δ	CUSUM diagram pro výběrové průměry k = 0,559 h = 4,346	FIR CUSUM diagram pro výběrové průměry k = 0, 559 h = 4,346	FIR CUSUM diagram pro výběrové průměry modifikovaný k = 0, 559 h = 4,410
0	370,2	342,2	370,1
0,5	38,1	29,8	30,8
1,0	10,0	6,3	6,5
1,5	5,4	3,2	3,3
2,0	3,7	2,2	2,3

CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu

Detekce větších odchylek



Srovnání účinnosti CUSUM se Shewhartovým regulačním diagramem

CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu

Zlepšení detekce větších odchylek

Kombinované schéma Shewhart-CUSUM

Statistika	Meze
$u_j = (x_j - \mu_0) / \sigma$	SCL, SCL
$S_j^+ = \max[0, S_{j-1}^+ + (u_j - k)]$	h
$S_j^- = \min[0, S_{j-1}^- + (u_j + k)]$	$-h$

Doporučení: (Lucas, 1982).

k	h	SCL
0,5	4	3,5
0,5	5	4,0

Proces je považován za statisticky nezvládnutý jak v případě, že

$$S_j^+ > h \text{ nebo } S_j^- < -h \quad \text{a} \quad u_j > SCL \quad \text{nebo} \quad u_j < -SCL$$

CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu

Postup při nepřesném odhadu parametrů procesu

Samo-startovací CUSUM

Samo-startovací CUSUM

1. Výpočet aktualizovaného (průběžného) průměru W_j a aktualizované (průběžné) výběrové směrodatné odchylky s_j

$$\bar{x}_j = \bar{x}_{j-1} + (x_j - \bar{x}_{j-1}) / j \quad \text{pro } j = 2, 3, \dots,$$

$$W_j = W_{j-1} + (j-1)(x_j - \bar{x}_{j-1})^2 / j \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots)$$

$$s_j = \sqrt{W_j / (j-1)} \quad \text{pro } j = 2, 3, \dots$$

Samo-startovací CUSUM

2. Standardizace každé naměřené hodnoty x_j

$$T_j = \frac{x_j - \bar{x}_{j-1}}{s_{j-1}} \quad \text{pro } j = 3, 4, \dots$$

3. Výpočet součinu $a_j T_j$, kde

$$a_j = \sqrt{\frac{j-1}{j}}$$

4. Nalezení hodnoty $F_{j-2}(a_j T_j)$ pro každé j , kde $F_{j-2}(\cdot)$ je hodnota distribuční funkce Studentova rozdělení s $j-2$ stupni volnosti

Samo-startovací CUSUM

5. Transformace na proměnnou U_j , která má normované normální rozdělení, a to pomocí inverzní distribuční funkce normovaného normálního rozdělení $U_j = \Phi^{-1}[F_{j-2}(a_j T_j)]$
6. Návrh parametrů k a h a konstrukce standardizovaného diagramu CUSUM pro individuální hodnoty

Doporučení Hawkins (1998):

doplnit o klasický Shewhartův diagram pro individuální hodnoty U_j s $CL = 0$, $LCL = -3$, $UCL = 3$ pro regulaci sporadických zvláštních změn

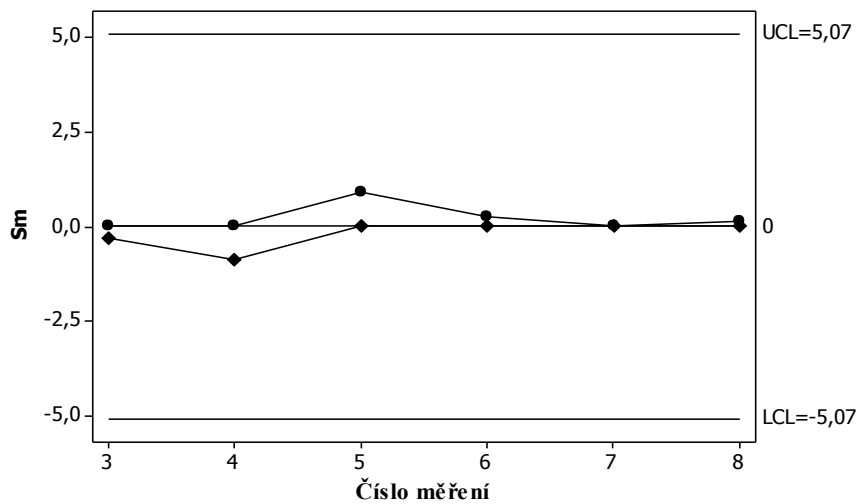
Samo-startovací CUSUM - příklad

Tabulka pro výpočet samo-startovacího CUSUM

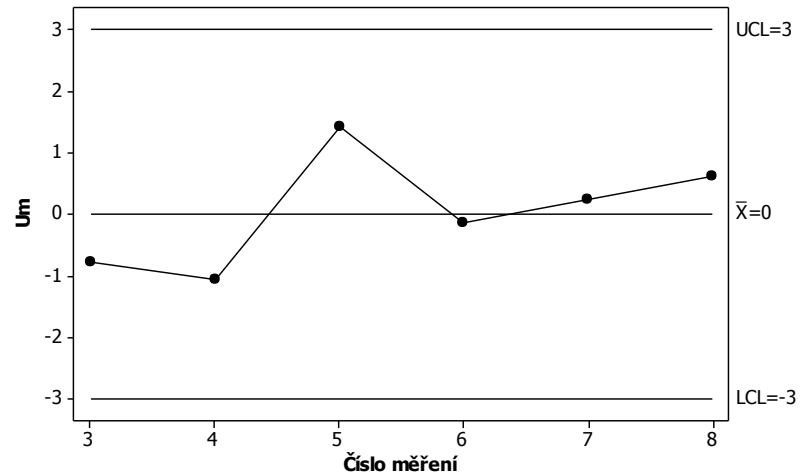
j	x_j	\bar{x}_j	W_j	s_j	T_j	$a_j T_j$	$F_{j-2}(a_j T_j)$	U_j
1	1071,36	1071,36	0	-	-	-	-	-
2	1043,43	1057,40	390,04	19,75	-	-	-	-
3	1027,35	1047,38	991,84	22,27	-1,52	-1,24	0,22	-0,79
4	1010,16	1038,08	2030,84	26,02	-1,67	-1,45	0,14	-1,07
5	1093,47	1049,15	4485,75	33,49	2,13	1,90	0,92	1,43
6	1043,24	1048,17	4514,87	30,05	-0,18	-0,16	0,44	-0,15
7	1056,50	1049,36	4574,37	27,61	0,28	0,26	0,60	0,25
8	1068,77	1051,79	4904,07	26,47	0,70	0,66	0,73	0,62

Samo-startovací CUSUM - příklad

Samo-startovací CUSUM



Shewhartův regulační diagram pro individuální hodnoty



CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu

Postup při porušení normality

- Transformace dat (Chou, 1998)
- Robustifikace (Lucas, 1982)
 - winzorizace (Hawkins, 1998), (Hawkins, 1993)
 - úprava parametrů k a h standardního CUSUM
 - při malých hodnotách parametru k a velkých hodnotách parametru h je efekt nenormality méně kritický než při větších hodnotách k
 - h se zvýší a k se přizpůsobí

CUSUM pro regulaci inherentní variability procesu

$$u_j = (x_j - \mu_0) / \sigma$$

$$v_j = \frac{\sqrt{|u_j|} - 0,822}{0,349}$$

$$V_j^+ = \max[0, v_j - k + V_{j-1}^+]$$

$$V_0^+ = V_0^- = 0$$

$$V_j^- = \max[0, -k - v_j + V_{j-1}^-]$$

Doporučení (Hawkins (1998):

- použití nenulové startovací hodnoty

CUSUM pro atributy

CUSUM pro počet neshod

$$C_j = \max(0, C_{j-1} + x_j - K) \quad j = 1, 2, \dots$$

x_j je hodnota náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením $Po(m)$

$$K = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\ln \mu_1 - \ln \mu_0} \quad H = -\frac{\ln \alpha}{\ln \mu_1 - \ln \mu_0}$$

α - riziko zbytečného signálu

CUSUM pro atributy

CUSUM pro počet neshodných jednotek

$$C_j = \max(0, C_{j-1} + x_j - K) \quad j = 1, 2, \dots$$

x_j - hodnota náhodné veličiny s binomickým rozdělením $\text{Bi}(n, p)$

$$K = \frac{n \ln \left(\frac{1-p_0}{1-p_1} \right)}{\ln \left(\frac{p_1}{1-p_1} \frac{1-p_0}{p_0} \right)} \quad H = - \frac{\ln \alpha}{\ln \left(\frac{p_1}{1-p_1} \frac{1-p_0}{p_0} \right)}$$

α - riziko zbytečného signálu

CUSUM pro atributy

CUSUM pro řídké jevy

Diagram CUSUM - založen na geometrickém nebo obecněji negativně binomickém rozdělení

CCC-CUSUM

Literatura

- **Barnard, G. A.:** Control Charts and Stochastic Processes. *Journal of the Royal Statistical Society (B)*, 1959, roč. 21, č. 2, s. 239–271
- **Bourke, P. D.:** Sample Size and the Binomial CUSUM Control Chart: the Case of 100% Inspection. *Metrika*, 2001, roč. 53, č. 1, s. 51–70
- **Brook, D., Ewans, D. A.:** An Approach to the Probability Distribution of CUSUM Run Length. *Biometrika*, 1972, roč. 59, č. 3, s. 539–549
- **ČSN ISO 7870-4** Regulační diagramy - Část 4. ÚNMZ, Praha 2015
- **Duncan, A.J.:** *Quality Control and Industrial Statistics*. Irwin, Homewood 1986
- **Ewan, W. D., Kemp, K. W.:** Sampling Inspection of Continuous Processes with no Autocorrelation between Successive Results. *Biometrika*, 1960, roč. 47, č. 3 a 4, s. 363–380
- **Ewan, W. D.:** When and How to Use Cu-Sum Charts. *Technometrics*, 1963, roč. 5, č. 1 s. 1–22
- **Gan F. F.:** An Optimal Design of CUSUM Quality Control Charts. *Journal of Quality Technology*, 1991, roč. 23, č. 4, s. 279–286
- **Gan, F. F.:** An Optimal Design of CUSUM Control Charts for Binomial Counts. *Journal of Applied Statistics*, 1993, roč. 20, č. 4, s. 445–460
- **Goel, A. L., Wu, S. M.** Determination of A.R.L. and a Contour Nomogram for Cusum Charts to Control Normal Mean. *Technometrics*, 1971, roč.13, s. 221–230

Literatura

- Han, S. W., Tsui, K. L., Ariyajunya, B., Kim, S. B.: A Comparison of CUSUM, EWMA, and Temporal Scan Statistics for Detection of Increases in Poisson Rates. *Qual. Reliab. Engng. Int.*, 2010, roč. 26, č. 3, 279–289
- Hawkins, D. M.: A CUSUM for Scale Parameter. *Journal of Quality Technology*, 1981, roč. 13, č. 4, s. 228-235
- Hawkins, D. M.: Self-starting Cusums for Location and Scale. *The Statistician*, 1987, roč. 36, s. 299–315
- Hawkins, D. M.: A Fast Accurate Approximation of Average Run Lengths of CUSUM Control Charts. *Journal of Quality Technology*, 1992, roč. 24, č. 1, s. 37–43
- Hawkins, D. M.: Cumulative Sum Control Charting: An Underutilized SPC Tool. *Quality Engineering*, 1993, roč. 5, č. 3, s. 463–477
- Hawkins, D. M., Olwell, D. H.: *Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement*. Springer Verlag, New York 1998
- Chang, T. C., Gan, F. F.: A Cumulative Sum Control Chart for Monitoring Process Variance. *Journal of Quality Technology*, 1995, roč. 27, č. 2, s. 109–119
- Cheng, S. W., Thaga, K.: Max-CUSUM Chart for Autocorrelated Processes. *Statistica Sinica*, 2005, roč. 15, č. 2, s. 527–546
- Chou, Y. M. et al.: Transforming Non-normal Data to Normality in Statistical Process Control. *Journal of Quality Technology*, 1998, roč. 30, s. 133–141
- Jensen, W. A. et al.: Effects of Parameter Estimation on Control Chart Properties: A Literature Review. *Journal of Quality Technology*, 2006, roč. 38, s. 95–108

Literatura

- Jones, R.: Decision Rules For Cusum Charts. *Quality Forum*, 1992, roč. 18, č. 3, s. 112–115
- Kemp, K. W.: The Use of Cumulative Sums for Sampling Inspection Schemes. *Applied Statistics*, 1962, roč. 11, č. 1, s. 16–31
- Kim, S. et al.: A Distribution-free Tabular CUSUM Chart for Atocorrelated Data. *IEEE Transactions*, 2007, roč. 39, s. 317–330
- Lee, J. et al.: A Distribution Free Tabular CUSUM Chart for Correlated Data with Automated Variance Estimation. *IEEE Transactions*, 2008, roč. 40, s. 417–425
- Lucas, J. M.: The Design and Use of V-mask Control Schemes. *Journal of Quality Technology*, 1976, roč. 8, č. 1, s. 1–12
- Lucas, J. M., Crosier, R. B.: Fast Initial Response for CUSUM Quality-Control Schemes: Give Your CUSUM A Head Start, *Technometrics*, 1982, roč. 24, č. 3, s. 199–205
- Lucas, J. M.: Combined Shewhart-CUSUM Quality Control Schemes. *Journal of Quality Technology*, 1982, roč. 14, č. 2, s. 51–59
- Lucas, J. M.: Counted Data CUSUM's. *Technometrics*, 1985, roč. 27, č. 3, s. 129–144
- Luceno, A., Puig-Pey, J.: Evaluation of the Rn-, „Lenhth Probability Distribution for CUSUM Charts: Assessing Chart Performance. *Technometrics*, 2000, roč. 42, s. 411–416
- Mei, Y., Han, S. W., Tsui, K-L.: Early Detection of a Change in Poisson Rate after Accounting for Population Size Effects. *Statistica Sinica*, 2011, roč. 21, č. 2, s. 597–624

Literatura

- **Mittag, H. J.:** *Statistical Methods of Quality Assurance*. Chapman & Hall, London 1993
- **Montgomery, D. C.:** *Introduction to Statistical Quality Control*. J.Wiley & Sons, New York 2013
- **Hawkins, D. M., Olwell, D. H.:** *Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement*. Springer Verlag, New York 1998
- **Noskievičová, D.:** Combination of Theoretical Knowledge and Software Abilities - an Important Presumption for Effective Application of SPC. *Kvalita Inovácia Prosperita*, 2008, roč. 12, č.1, s. 18–30
- **Osanaiye, P. A., Talabi, C. O.:** On Some Non-Manufacturing Applications of Counted Data Cumulative Sum (CUSUM) Control Chart Schemes. *The Statistician*, 1989, roč. 38, č. 4, s. 251–257
- **Page, E.S:** Continuous Inspection Schemes. *Biometrika*, 1954, roč. 41, 100 –114
- **Page, E.S.:** Controlling the Standard Deviation by CUSUM and Warning Lines. *Technometrics*, 1963, č. 5, 307–315
- **Prahbu, S. S. et al.:** A Selection of the Subgroup Size and Sampling Interval for a CUSUM Control Chart. *IEE Transactions*, 1997, roč. 29, s. 451–457
- **Pyzdek, T.:** *Pyzdek's Guide to SPC. Applications and Special Topics (Vol. 2)*. ASQC – Quality Press, Tuscon 1992
- **Rossi, G., Lampugnani, L., Marchi, M.:** Approximate CUSUM Procedure for Surveillance of Health Events. *Statistics in Medicine*, 1999, roč. 18, č. 16, s. 2111–2122

Literatura

- **Runger, G. C., Willemain, T. R.:** Model-based And Model-free Control of Autocorrelated Processes. *Journal of Quality Technology*, 1995, roč. 27, č. 4, s. 283–292
- **Ryan, A. G., Woodall, W. H.:** Control Charts for Poisson Count Data with Varying Sample Sizes. *Journal of Quality Technology*, 2010, roč. 42, č. 3, s. 260–275
- **Ryan, T. P.** *Statistical Methods For Quality Improvement*. J. Wiley & Sons, New York 2011
- **Shu, L. et al.:** An Adaptive CUSUM Procedure for Signaling Process Variance Changes of Unknown Sizes. *Journal of Quality Technology*, 2010, roč. 42, č. 1, s. 69–85
- **Siegmund, D.:** *Sequential Analysis: Tests and Confidence Intervals*. Springer-Verlag, New York 1985
- **Singh, S., Prajapati, D. R.:** Behavior of CUSUM Chart for Autocorrelated Data. *Internationa Journal of Engineering Sciences Research*, 2011, roč. 2, č. 4, s. 1–8
- **Stoumbos, Z. G., Reynolds, M.R.:** The Robustness and Performance of CUSUM Control Charts Based on the Double-exponential and normal Distributions. *Frontiers in Statistical Quality Control*, 2004, roč. 7, s. 79–100
- **Tošenovský J., Noskievičová, D.:** *Statistické metody pro zlepšování jakosti*. Montanex, Ostrava 2000
- **Tuprah, K., Ncube, M. A.:** Comparison of Dispersion Quality Control Charts. *Sequential Analysis*, 1976, roč. 6, č. 2, s. 155–163
- **van Dobben de BruynGriffin, C. S.:** *Cumulative Sum Tests*. Griffin, London 1968

Literatura

- **Wheeler, D. J.:** *Advanced Topics in Statistical Process Control*. SPC Press, Knoxville 2004
- **Woodall, W. H. & Adams, B. M.:** The Statistical Design of CUSUM Charts. *Quality Engineering*, 1993, č. 5, s. 559–570
- **Xie, M. et al.:** *Statistical Models and Control Charts for High-Quality Processes*. Kluwer Academic Publishers, London 2002
- **Yashchin, E.:** On Weighted CUSUM Technique. *Technometrics*, 1989, roč. 31, č. 1, s. 321–338

Děkuji za pozornost.