

# Q-diagramy

Jiří Michálek  
ÚTIA AVČR

# Proč Q-diagramy?

## Nevýhody Shewhartových diagramů

- velikost regulačních mezí závisí na rozsahu logické podskupiny
- nehodí se pro krátké výrobní série
- normálně rozdělená vstupní data
- obvykle se pracuje s malým rozsahem podskupiny
- regulační meze se musí s novými daty přepočítat
- vstupní data mají být stochasticky nezávislá

# Proč Q-diagramy?

## Výhody Q-diagramů

- konstantní regulační meze bez ohledu na rozsah podskupiny
- možnost nenormálně rozdělených vstupních dat

# Základní myšlenka konstrukce Shewhartových diagramů

Statistiky  $W_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$  pro sledování  
stability procesu, základ pro Shewhartovy  
meze

$$E(W) \pm 3 SD(W),$$

resp.  $E(.)$  a  $SD(.)$  jsou nahrazeny vhodnými  
odhady

# Základní myšlenka konstrukce Q-diagramů

$W_i \rightarrow Q_i$  pomocí vhodné transformace,  
kde  $\{Q_i\}$  jsou „téměř nezávislé“ a rozdělené  
 $N(0,1)$

Nechť  $W_i$  má distribuční funkci  $G_i$ ,

spočítejme  $u_i = G_i(W_i)$ ,

$Q_i = \Phi^{-1}(u_i)$ , kde  $\Phi(\cdot)$  je  $N(0,1)$ .

# Základní myšlenka konstrukce Q-diagramů

Pokud distribuce  $G_i(\cdot)$  závisí na neznámých parametrech, pak je nutno tyto vhodně odhadnout z dat

$\alpha_L, \alpha_U$ .....zvolená rizika falešného poplachu,  
pak regulační meze pro Q-diagram jsou  
stanoveny jako:  $UCL(Q_i) = q(\alpha_U)$

$$CL(Q_i) = 0$$

$$LCL(Q_i) = q(\alpha_L)$$

# Nejjednodušší případ

Normálně (přibližně) rozdělená data s různými rozsahy

$X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}$

$\bar{X}_1, s_1$

$X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}$

$\bar{X}_2, s_2$

$X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ini}$

$\bar{X}_i, s_i$

index  $i$  představuje průběžný čas

## Nejjednodušší případ (pokr.)

Spočítáme průběžný celkový průměr

$$\bar{X}_i = \sum n_j \bar{X}_j / \sum n_j$$

a průběžnou sdruženou směrodatnou odchytku pomocí vzorce

$$s_{pi} = (\sum (n_j - 1) s_j^2 / \sum (n_j - 1))^{1/2}$$



## Nejjednodušší případ (pokr.)

Odvození Q-statistik závisí na znalosti parametrů  $\mu$ ,  $\sigma$  normálního rozdělení  
např. nestranný odhad pro  $\sigma$  často používaný je

$$s_{pi} / C_4(\sum(n_j-1))$$

technické regulační meze vs. přirozené  
regulační meze

## Nejjednodušší případ (pokr.)

Technické meze pro  $\bar{X}$  jsou založeny na:  
parametry  $\mu$ ,  $\sigma$  jsou dány

$$Q_i(\bar{X}_i) = \sqrt{n_i} (\bar{X}_i - \mu_0) / \sigma_0$$

Přirozené meze pro  $\bar{X}$  jsou založeny na:

$$Q_i(\bar{X}_i) = \Phi^{-1}(t_{N_i}(\sqrt{M_i} (\bar{X}_i - \bar{X}_{i-1}) / s_{pi})),$$

$$N_i = n_1 + n_2 + \dots + n_i - i,$$

$$M_i = (n_i(n_1 + n_2 + \dots + n_{i-1})) / (N_i + i)$$

## Nejjednodušší případ (pokr.)

Technické meze pro  $s$  jsou založeny na:  
parametr  $\sigma$  je dán

$$Q_i(s^2_i) = \Phi^{-1}(\chi^2_{ni-1}((n_i-1)s^2_i)/\sigma^2_0)$$

Přirozené meze pro  $s$  jsou založeny na:

$$Q_i(s^2_i) = \Phi^{-1}(F_{ni-1, Ni-1}(w_i)),$$

$$\text{kde } w_i = s^2_i / \mathbf{s}^2_{p,i-1}$$

# Q-diagramy pro individuální hodnoty

1. Konstrukce technických regulačních mezí pro parametr polohy je založena na statistice, parametry dány

$$Q_i(X_i) = (X_i - \mu_0)/\sigma_0$$

2. Konstrukce přirozených regulačních mezí pro parametr polohy je založena na statistice, parametry odhadovány

$$Q_i(X_i) = \Phi^{-1}(t_{i-1}[\sqrt{(i-1)/i}(X_i - \bar{X}_{i-1})/s_{i-1}]),$$

$s_i$  je odvozeno od klouzavého rozpětí  $R_i = X_i - X_{i-1}$

# Q-diagramy pro individuální hodnoty

1. Technické regulační meze pro úroveň variability jsou založeny na statistice

$$Q_i(s) = \Phi^{-1}(\chi_1^2[R_i^2/2\sigma_0^2])$$

2. Přírozené regulační meze pro úroveň variability jsou založeny na statistice

$$Q_i(s) = \Phi^{-1}(F_{1,v}[vR_i^2/(R_2^2+R_3^2+\dots+R_{i-1}^2)]),$$

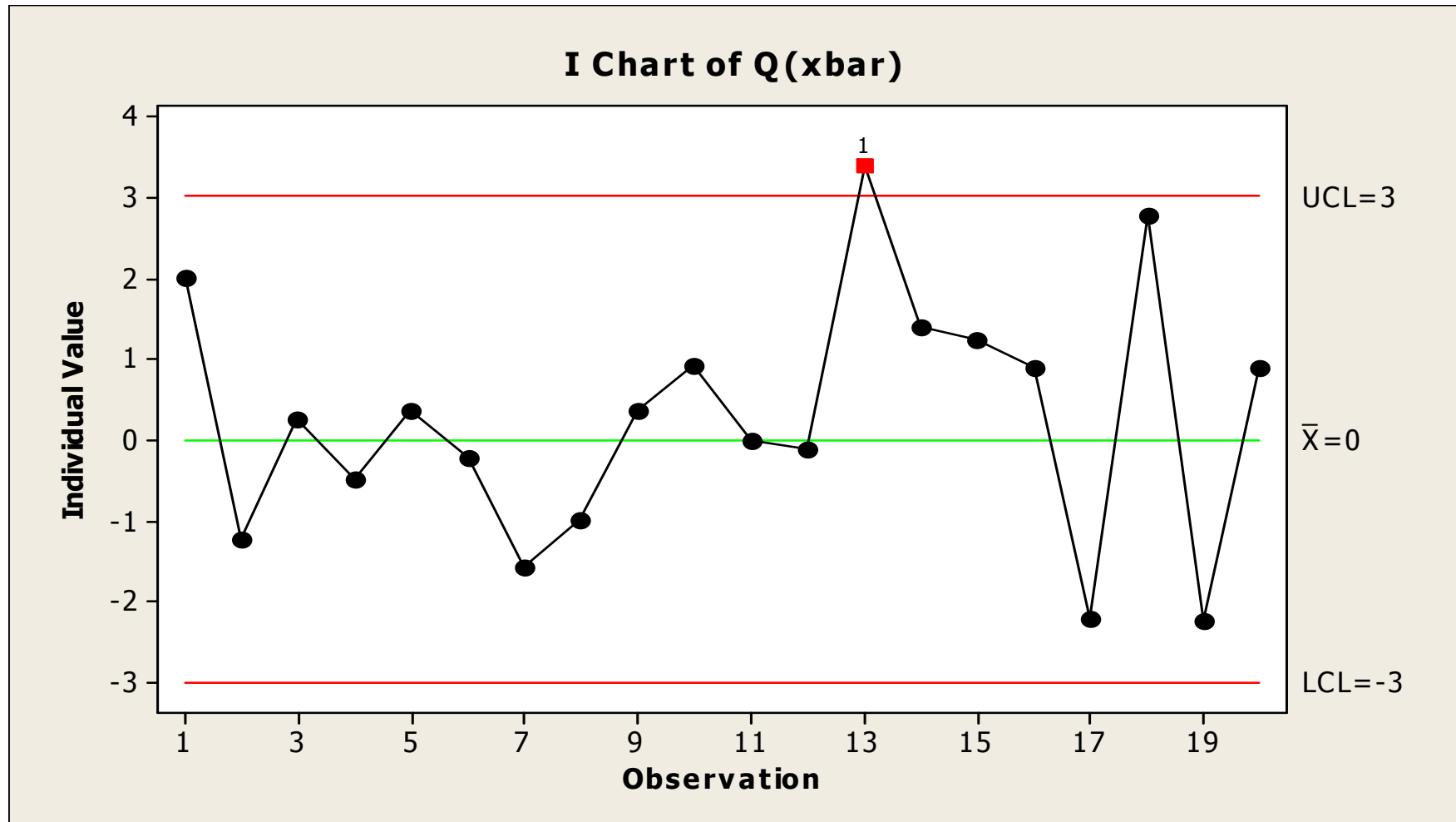
kde  $v = i/2 - 1$ , pouze sudé hodnoty se zobrazují do grafu

# Příklad 1

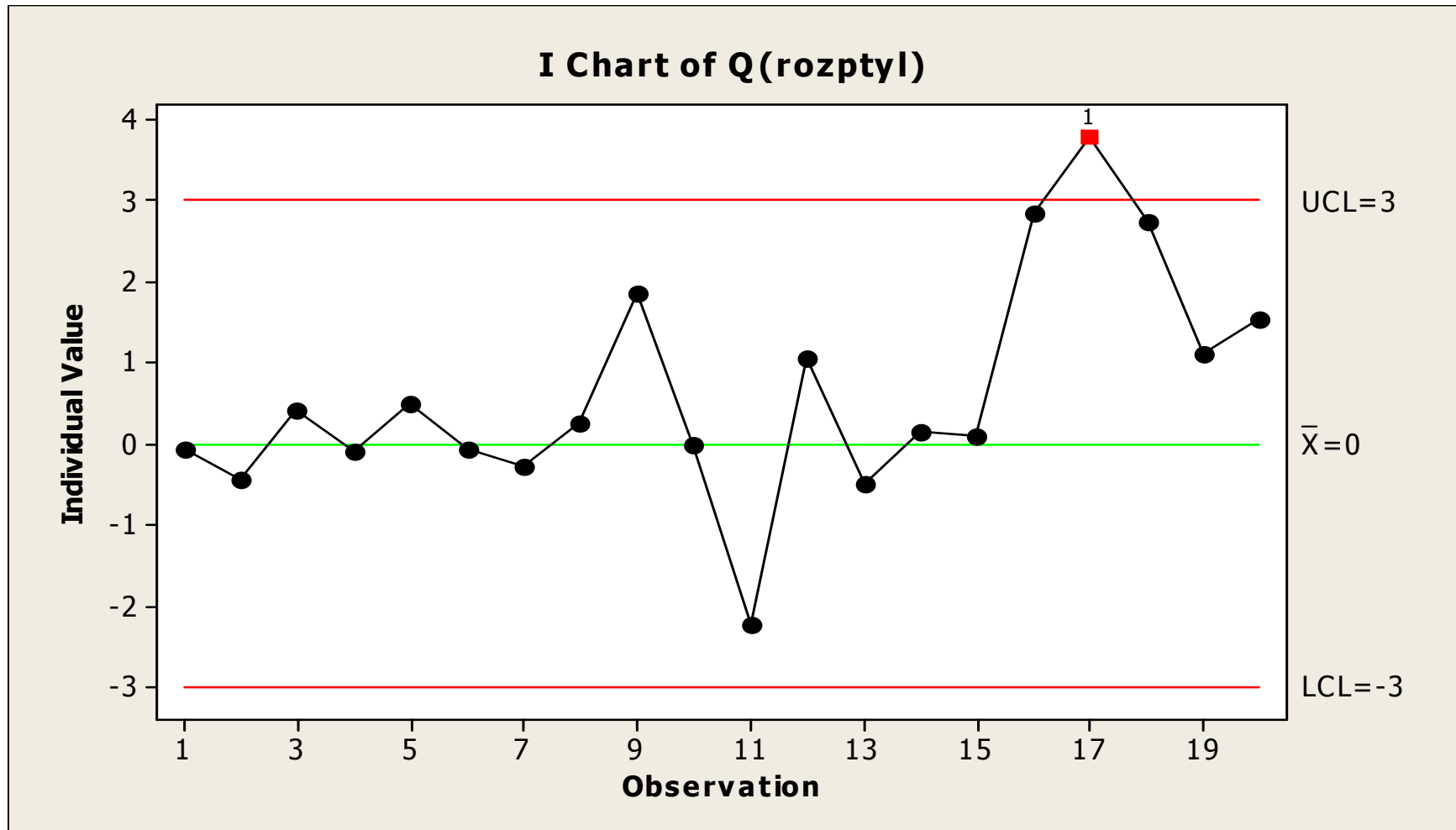
Parametry  $\mu=12$ ,  $\sigma=0,02$  jsou známe:

•	rozsah	průměr	rozptyl	odchylka	Q(xbar)	chí-kvadrát	uniform	Q(rozptyl)
•	5	12,018	0,00032	0,0178885	2,01246	3,200	0,47500	-0,06271
•	6	11,990	0,00028	0,0167332	-1,22474	3,500	0,33100	-0,43715
•	3	12,003	0,00043	0,0207364	0,25981	2,150	0,66200	0,41793
•	4	11,995	0,00030	0,0173205	-0,50000	2,250	0,46100	-0,09791
•	3	12,004	0,00046	0,0214476	0,34641	2,300	0,68700	0,48736
•	5	11,998	0,00032	0,0178885	-0,22361	3,200	0,46900	-0,07778
•	10	11,990	0,00033	0,0181659	-1,58114	7,425	0,39300	-0,27151
•	8	11,993	0,00042	0,0204939	-0,98995	7,350	0,59800	0,24817
•	6	12,003	0,00099	0,0314643	0,36742	12,375	0,96800	1,85218
•	7	12,007	0,00036	0,0189737	0,92601	5,400	0,49800	-0,00501
•	7	12,000	0,00006	0,0077460	0,00000	0,900	0,01300	-2,22621
•	5	11,999	0,00067	0,0258844	-0,11180	6,700	0,85300	1,04939
•	8	12,024	0,00029	0,0170294	3,39411	5,075	0,31400	-0,48454
•	4	12,014	0,00039	0,0197484	1,40000	2,925	0,55400	0,13577
•	6	12,010	0,00039	0,0197484	1,22474	4,875	0,53600	0,09036
•	5	12,008	0,00188	0,0433590	0,89443	18,800	0,99781	2,84941
•	6	11,982	0,00209	0,0457165	-2,20454	26,125	0,99992	3,77501
•	7	12,021	0,00132	0,0363318	2,77804	19,800	0,99692	2,73914
•	9	11,985	0,00062	0,0248998	-2,25000	12,400	0,86896	1,12149
•	4	12,009	0,00106	0,0325576	0,90000	7,950	0,93810	1,53902

# Příklad 1 – Q-diagram pro průměr



# Příklad 1- Q-diagram pro rozptyl





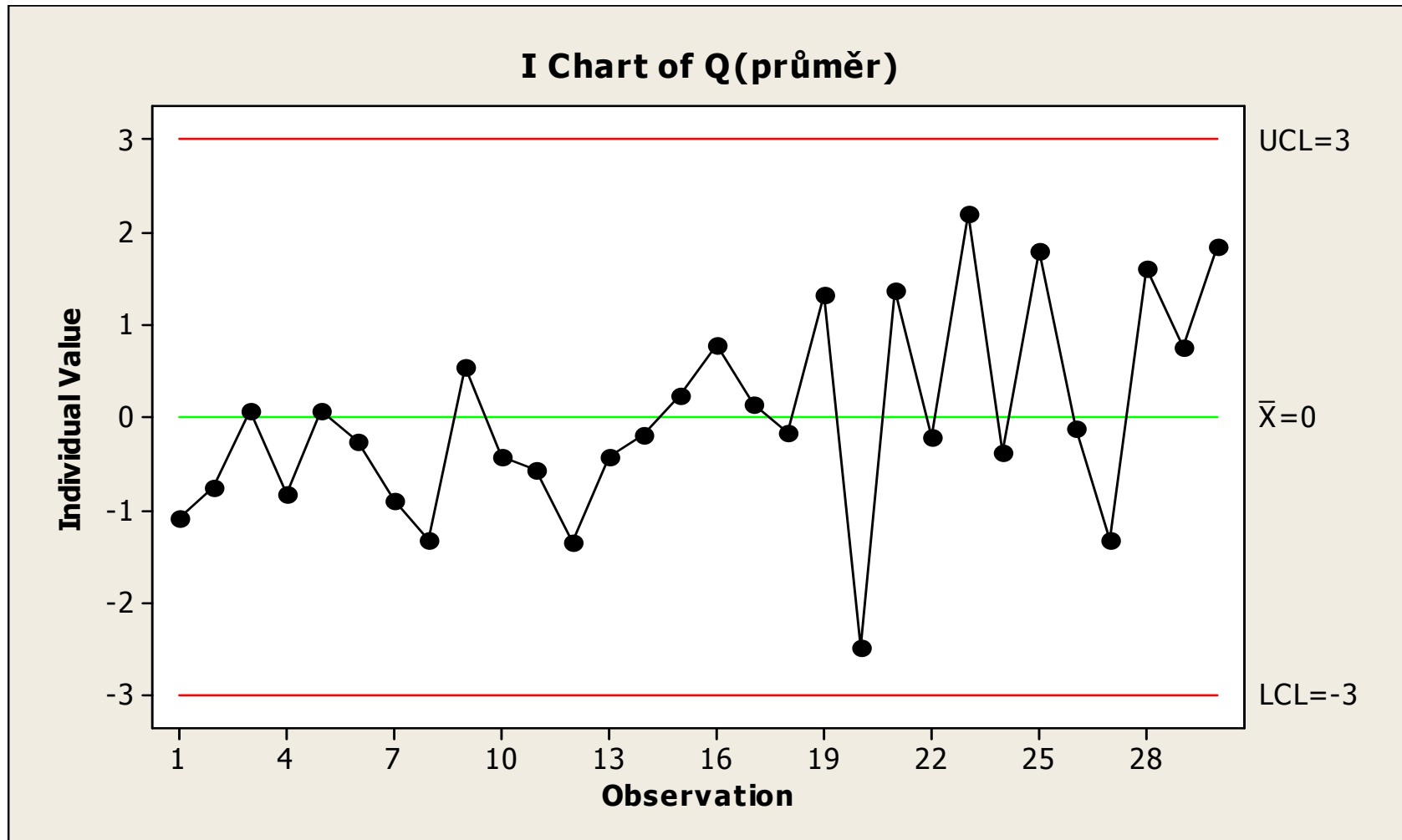
# Příklad 2

Data: 30 podskupin po 5 hodnotách v podskupině,  
parametry neznámé, odhadované z dat

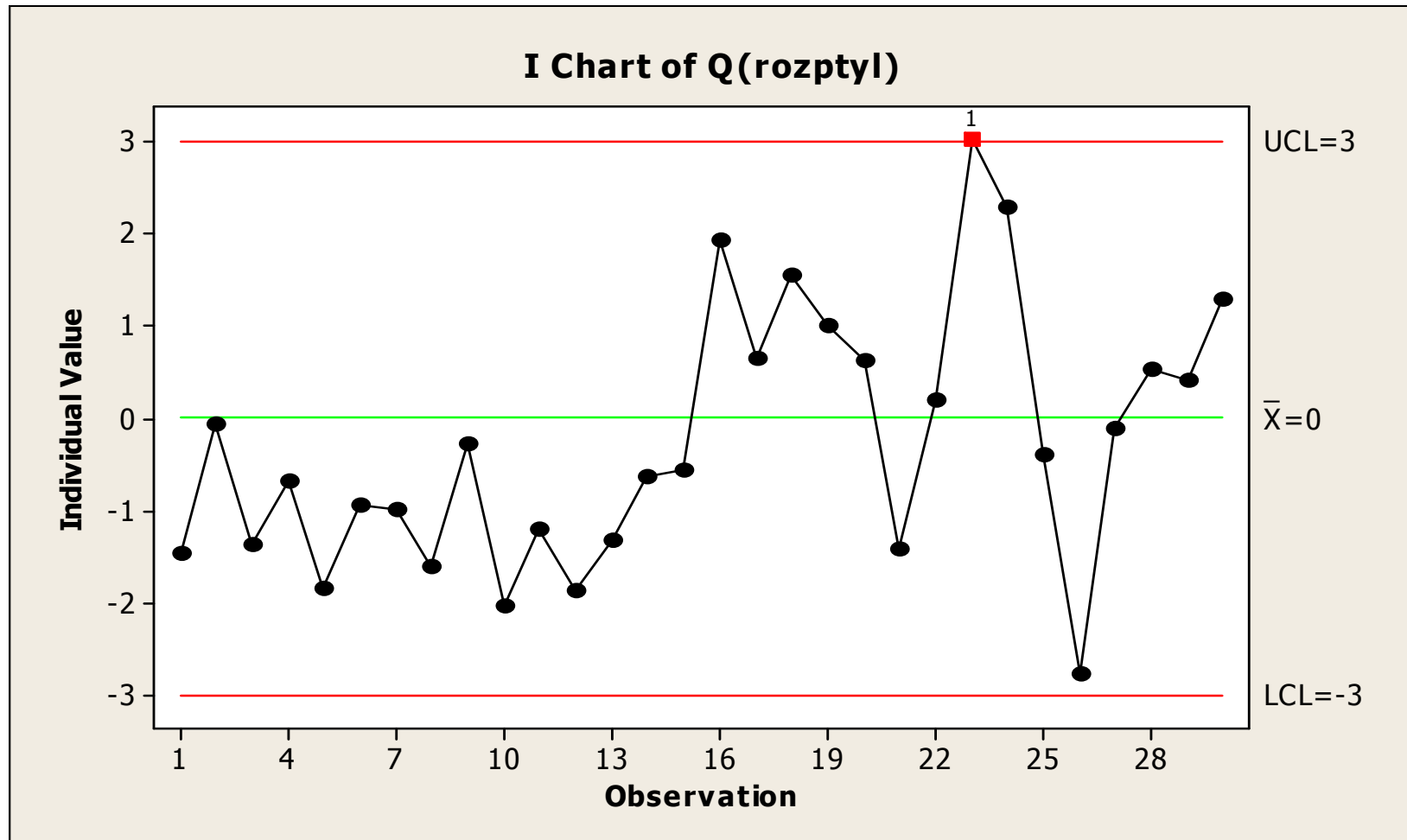
•	x1	x2	x3	x4	x5
•	5,001	4,959	4,996	4,979	4,986
•	4,981	5,019	4,951	5,026	4,972
•	5,006	4,976	4,999	5,018	5,018
•	5,011	4,953	4,973	5,000	5,005
•	5,012	4,990	5,010	5,016	4,988
•	4,986	5,010	5,006	5,021	4,966
•	4,985	4,980	4,962	4,991	5,020
•	4,999	4,966	4,969	4,995	4,974
•	5,014	5,024	5,044	4,965	5,008
•	5,012	4,987	5,002	4,992	4,983
•	4,981	4,968	5,000	5,018	4,998
•	4,998	4,969	4,984	4,984	4,966
•	5,006	4,989	4,991	4,971	5,018
•	5,014	4,999	5,025	4,998	4,959
•	5,026	4,962	5,004	5,017	5,021
•	5,058	5,056	5,018	4,912	5,031
•	5,005	5,021	4,959	5,064	4,974
•	4,909	4,993	5,024	5,023	5,048
•	4,994	5,010	4,993	5,018	5,104
•	4,977	4,901	4,944	4,978	5,008
•	5,016	5,005	5,025	5,051	5,026
•	4,976	5,026	4,958	5,043	4,991
•	4,979	5,168	5,052	4,993	4,999
•	4,937	4,928	5,059	5,067	4,989
•	5,003	5,026	5,029	5,078	5,022
•	5,002	5,010	4,997	5,001	4,991
•	4,983	4,973	4,940	4,979	5,027
•	5,059	5,070	5,012	4,971	5,030
•	5,034	4,966	5,047	5,044	4,981
•	5,101	4,968	5,028	5,057	5,007

Data nejsou normálně rozdělena

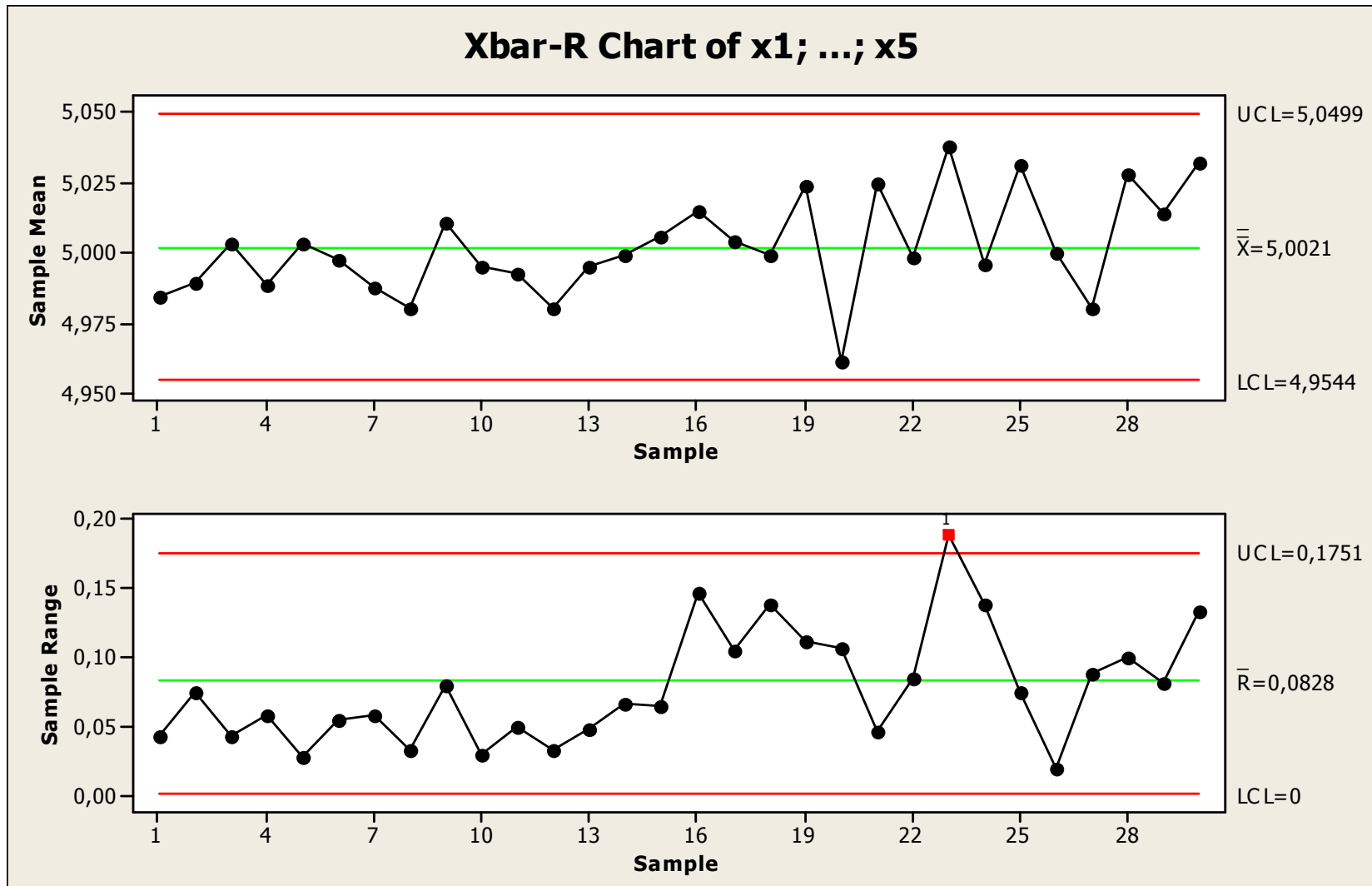
# Příklad 2 – Q-diagram pro průměr



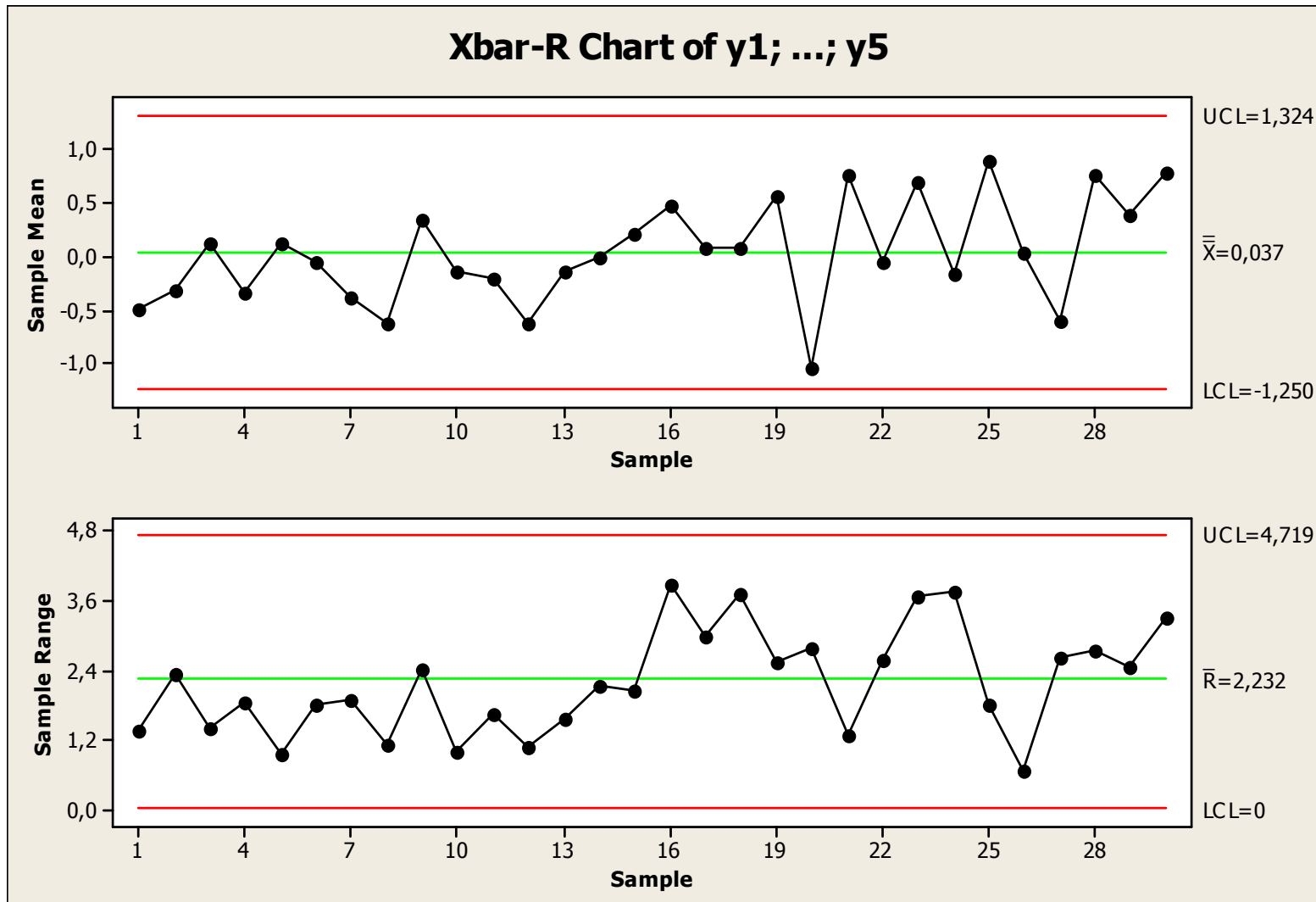
# Příklad 2 – Q-diagram pro rozptyl



# Příklad 2 – Shewhartův diagram původní data



# Příklad 2 - Shewhartův diagram po Johnsonově transformaci



# Srovnání diagramů

Shewhartův diagram i Q-diagram ukazují na tentýž problém ve variabilitě

Shewhartův diagram pro data po transformaci nic takového neukazuje

Shewhartovy diagramy jsou snáze pochopitelné pro obsluhu

Konstrukce Q-diagramů je složitá, horší interpretace jejich průběhu

# Q-diagramy pro atributivní znaky

Analogie p-diagramu

a) parametr  $p$  je známý nebo daný

$$u_i = B(x_i, n_i, p),$$

kde  $n_i$  je rozsah podskupiny,

$x_i$  je počet zjištěných neshodných jednotek,

$B(\cdot, \cdot, \cdot)$  je binomická distribuční funkce.

Pak

$$Q_i = \Phi^{-1}(u_i),$$

$i = 1, 2, \dots, n$

## Příklad 3 – Q-diagram pro neshodné

Rozsah podskupiny je 63

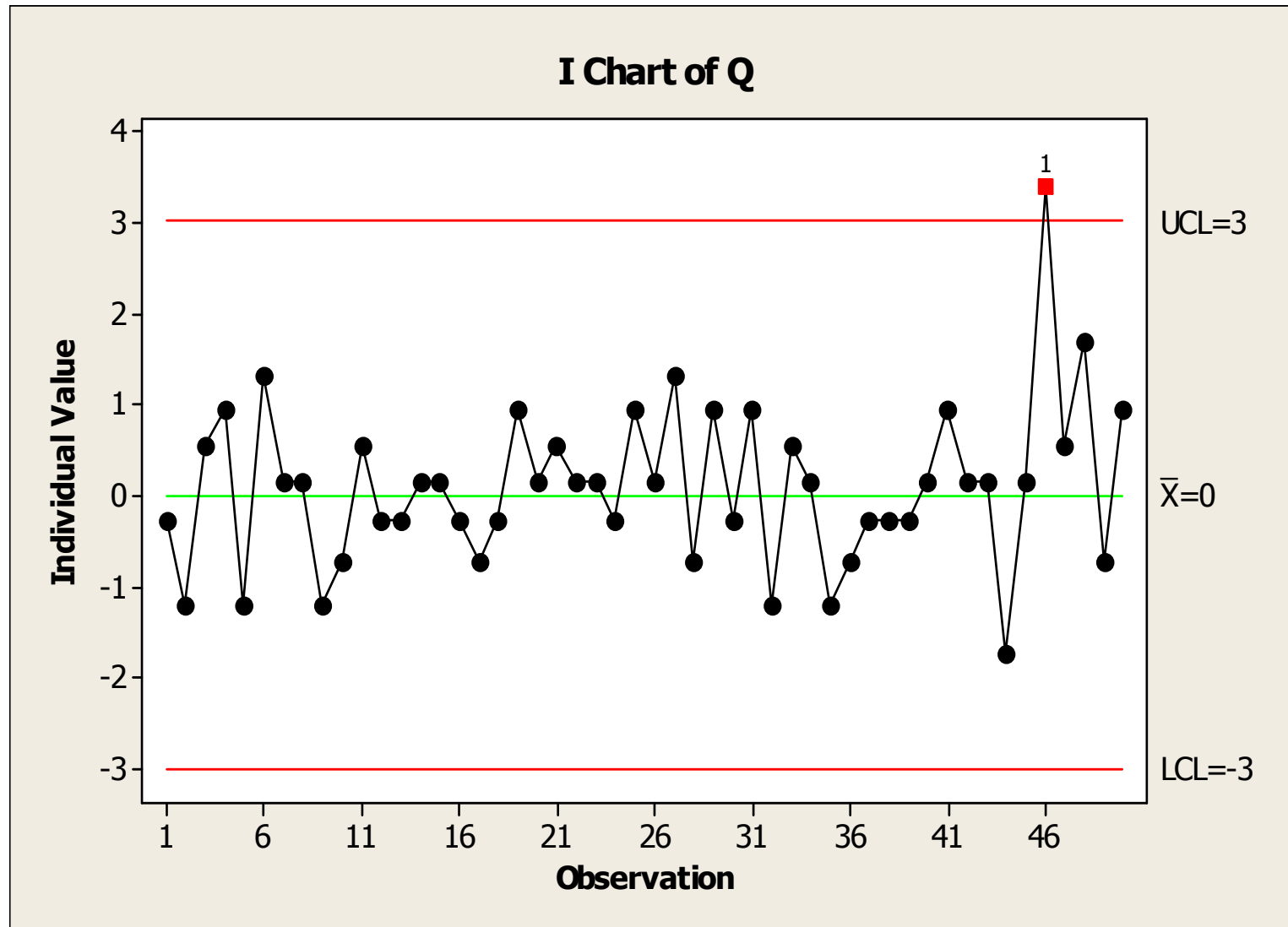
požadovaná hodnota parametru  $p = 0,1$

získaná data celkem 50 hodnot

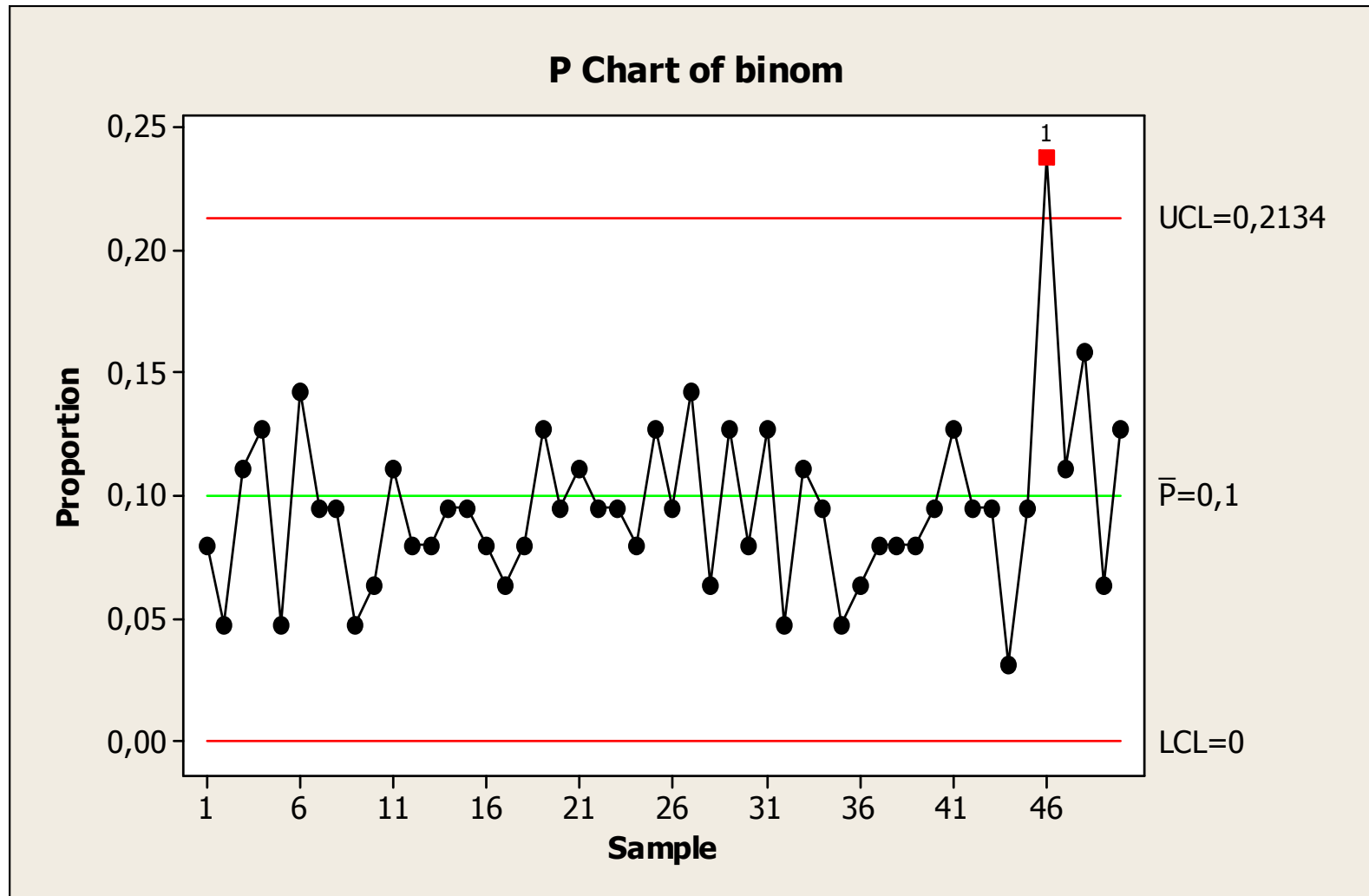
Analýza diagramu detekuje změnu v chování  
procesu u podskupiny 46



# Příklad 3 – Q-diagram pro neshodné



# Příklad 3 – p-diagram pro porovnání



# Q-diagramy pro atributivní znaky

Analogie p-diagramu

b) parametr  $p$  odhadovaný z dat

$$N_i = \sum n_j, t_i = \sum x_j,$$

položme

$$u_i = H(x_i, t_i, n_i, N_{i-1})$$

a 
$$Q_i = \Phi^{-1}(u_i).$$

$H(x, n, N_1, N_2)$  je distribuční funkce hypergeometrického rozdělení,  $N_1$  je počet neshodných,  $N_2$  je počet dobrých

$$i = 2, 3, \dots$$

# Q-diagramy pro atributivní znaky

Analogie u-diagramu pro neshody

- a) parametr  $\lambda$  Poissonova rozdělení je daný či známý  
 $c_i$  je počet neshod v podskupině o rozsahu  $n_i$ ,

$$u_i = P(c_i, \lambda n_i)$$

$$Q_i = \Phi^{-1}(u_i),$$

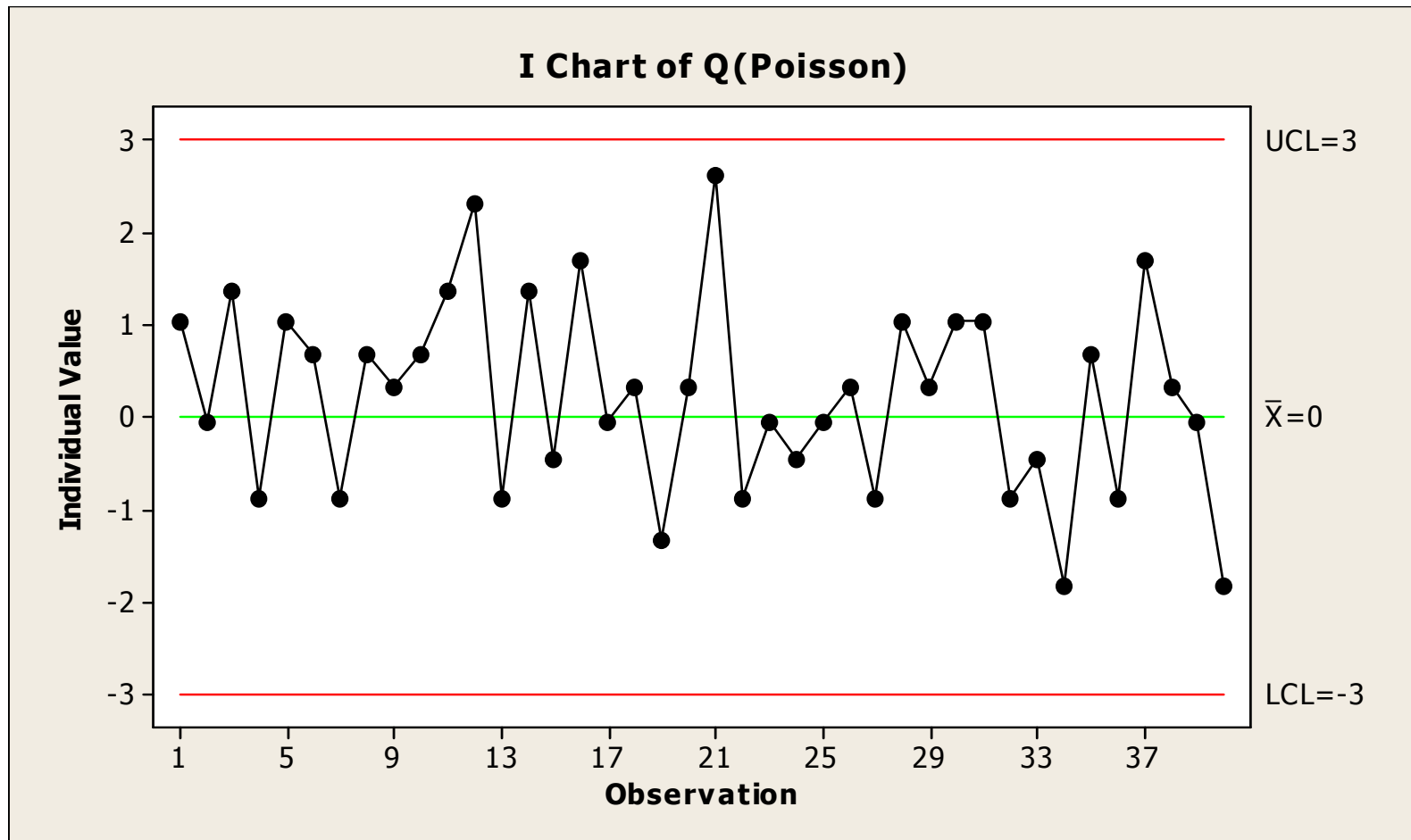
kde  $P(\cdot, \cdot)$  je distribuce Poissonova rozdělení

## Příklad 4 – Q-diagram pro neshody

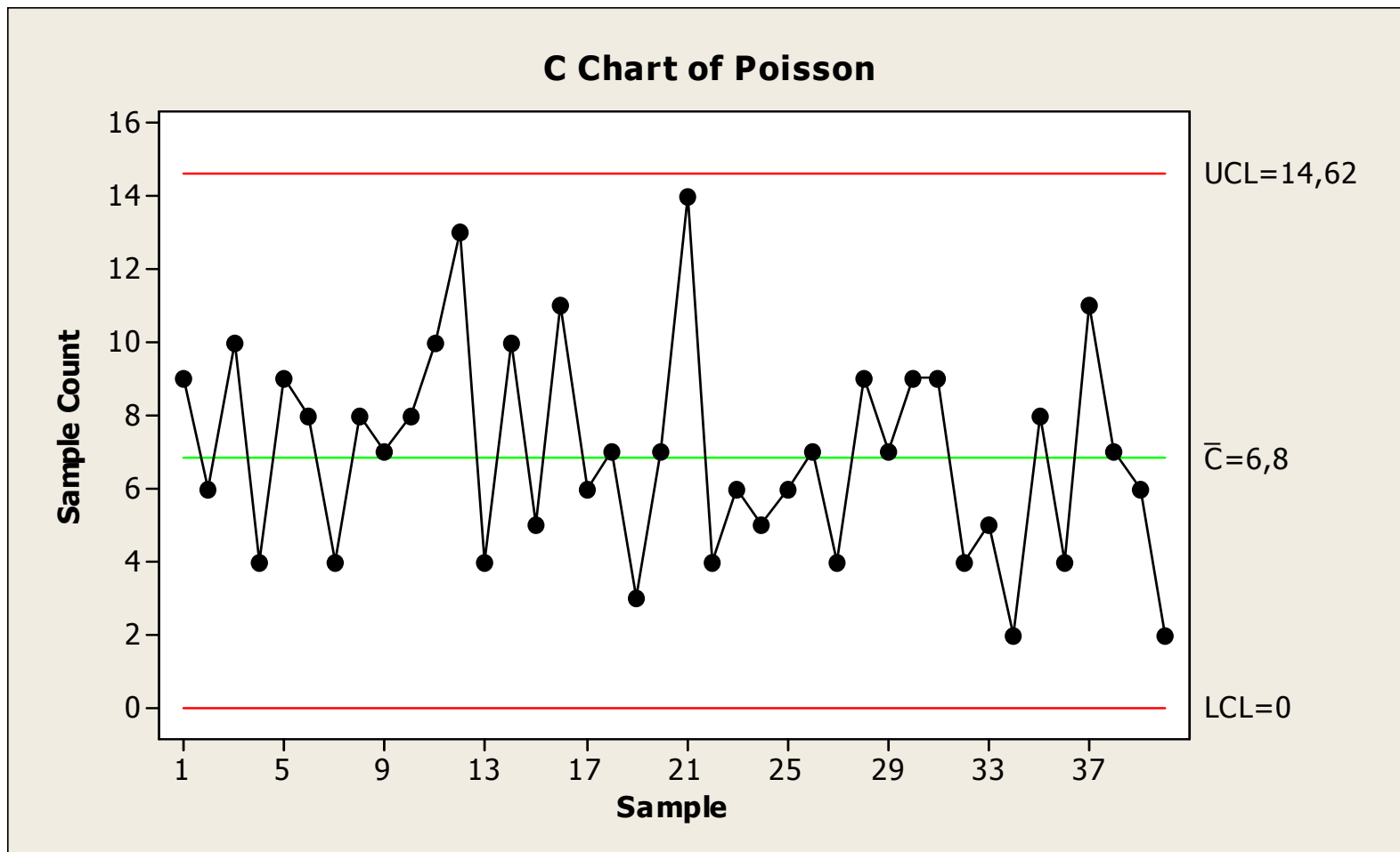
Jsou kontrolovány vždy 4 jednotky,  
parametr  $\lambda$  vůči jednotce má hodnotu 1,7

získaná data celkem 40 hodnot  
analýza Q-diagramu dokazuje stabilitu procesu

# Příklad 4 – Q-diagram pro neshody



# Příklad 4 — c-diagram pro porovnání



# Q-diagramy pro atributivní znaky

Analogie u-diagramu

parametr  $\lambda$  je neznámý a odhadovaný z dat

položme  $u_i = B(c_i, t_i, n_i/N_i),$

$$Q_i = \Phi^{-1}(u_i)$$

kde  $c_i$  je počet neshod v podskupině rozsahu  $n_i,$

$t_i$  je kumulativní součet počtu zjištěných neshod

$N_i$  je kumulativní součet rozsahů podskupin

$B(\cdot, \cdot, \cdot)$  je distribuce binomického rozdělení



# Závěr

Lze konstatovat, že Q-diagramy nepřinášejí příliš nového a jejich aplikace v praxi má smysl snad pouze u krátkých sérií

Klasické Shewhartovy diagramy jsou názornější, přístupné v celé řadě softwarů

Použitá literatura: Ch.P.Quesenberry

*SPC Methods for Quality Improvement,*

John Wiley&Sons, N.Y.1997

**Děkuji za vaši pozornost**