

Regulační diagramy

EWMA

Eva Jarošová

Škoda Auto Vysoká škola

ČSJ 19.2.2015

Obsah

1. Podstata a konstrukce diagramu
2. Využití diagramů EWMA
3. Porovnání Shewhartova a EWMA diagramu
4. Volba parametrů
5. Ukázka aplikace
6. Literatura

Podstata diagramu EWMA

EWMA = exponentially weighted moving averages
(exponenciálně vážené klouzavé průměry)

známé z analýzy časových řad – jednoduché exponenciální
vyrovnávání

Předpoklad – proces pod statistickou kontrolou

$$y_t = \mu + \varepsilon_t$$

Odhad konstanty μ v okamžiku t je z_t

Po získání nového pozorování y_{t+1} se aktuální odhad z_t
upravuje

$$z_{t+1} = \lambda y_{t+1} + (1 - \lambda) z_t$$

Podstata diagramu EWMA

Statistika EWMA

$$z_t = \lambda y_t + (1 - \lambda) z_{t-1}$$

Odhad z_t konstanty μ je váženým průměrem aktuálního pozorování y_t a předcházejícího odhadu z_{t-1}

Váhy λ a $1 - \lambda$, $0 < \lambda \leq 1$

Postupným dosazováním dostaneme

$$z_t = \lambda y_t + \lambda(1 - \lambda) y_{t-1} + \lambda(1 - \lambda)^2 y_{t-2} + \dots + \lambda(1 - \lambda)^{t-1} y_1 + (1 - \lambda)^t z_0$$

Koeficienty u jednotlivých pozorování klesají exponenciálně směrem do minulosti

Kde lze diagramy EWMA využít?

- Pro průměry podskupin i pro individuální data (výhodné zvláště pro individuální data)
- V druhé etapě SPC, pro detekci menších posunů procesu
- Při různých rozděleních sledované proměnné Y
 - robustní vůči porušení předpokladu normality
 - pro počty neshod (Poissonovo rozdělení)*
 - CCC-r EWMA pro procesy s vysokou způsobilostí (negativně binomické rozdělení)
- Pro proces s autokorelací (úprava viz Montgomery, 2009)

Konstrukce diagramu

Centrální přímka $CL = z_0$ (cílová hodnota nebo průměr z dostupných pozorování)

Regulační meze: analogie Shewhartova diagramu $UCL_i, LCL_i = z_0 \pm 3\sigma_{z_i}$

obecněji $UCL_i, LCL_i = z_0 \pm L\sigma_{z_i}$

kde $\sigma_{z_i} = \sigma_Y \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2i}]}$

$$LCL_i = z_0 - L\sigma_Y \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2i}]} \quad UCL_i = z_0 + L\sigma_Y \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2i}]}$$

pro $i \rightarrow \infty$ $[1 - (1-\lambda)^{2i}] \rightarrow 1$

Ustálené regulační meze

$$LCL^* = z_0 - L\sigma_Y \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$$

$$UCL^* = z_0 + L\sigma_Y \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$$

Vyhlazování pomocí klouzavých průměrů

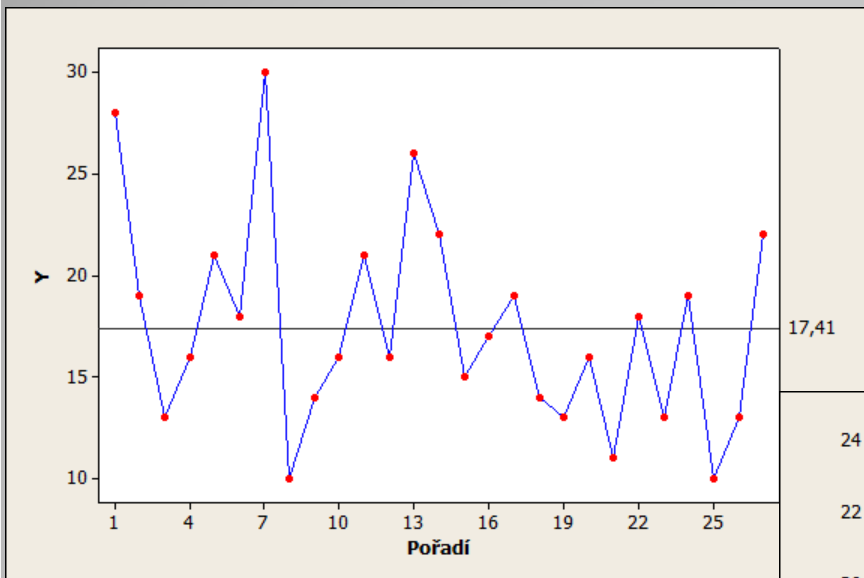
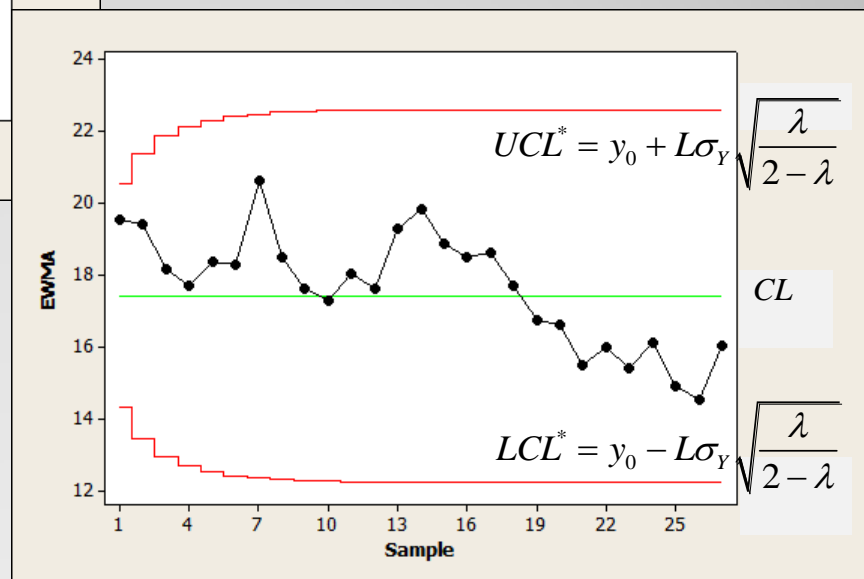


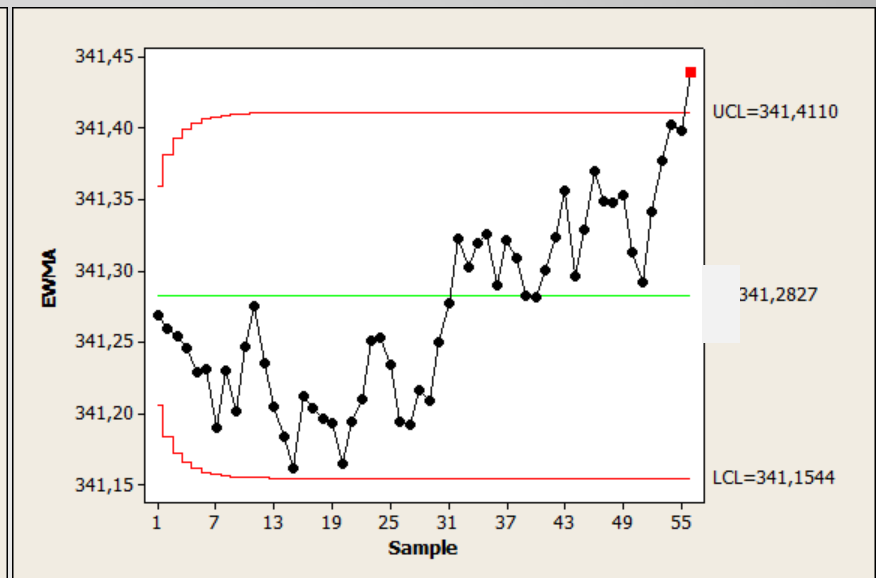
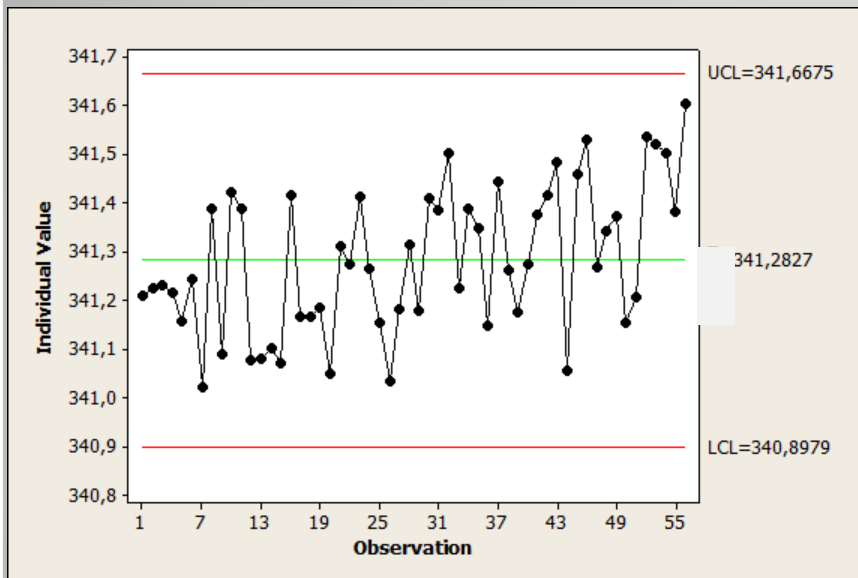
Diagram EWMA



Shewhart vs EWMA

Základní hodnoty nejsou dány
Odhad z_0 na základě dat (zde průměr 56 pozorování)

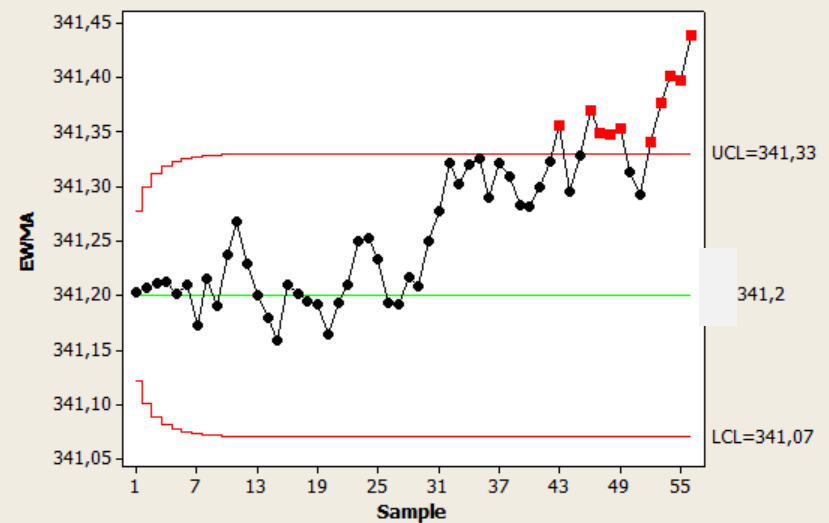
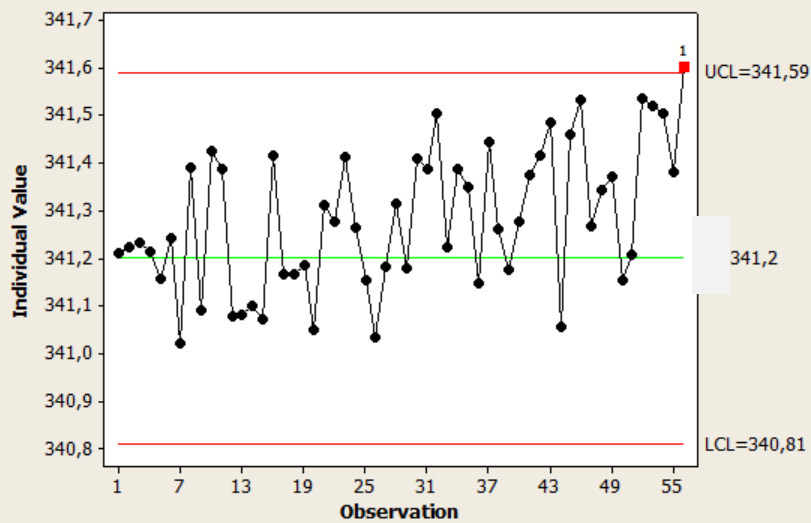
$$\lambda = 0,2, L = 3$$



Základní hodnoty jsou dány $\mu_0 = 341,2$; $\sigma_0 = 0,13$

$$z_0 = \mu_0$$

$$\lambda = 0,2, L = 3$$



Průměrná doba přeběhu ARL

průměrný počet vynesných bodů do okamžiku signálu

závisí na velikosti posunu δ od cílové hodnoty

Požadavek:

ARL(0) co největší

ARL(δ) pro $\delta \geq \delta_0 > 0$ co nejmenší

Vlastnosti určeny volbou parametrů λ a L

Shewhart vs EWMA individuální hodnoty

EWMA s parametry $\lambda = 0,2$ a $L = 3$

δ (nás. σ)	ARL (δ)	
	Shewhart	EWMA
0	370,4	560
0,5	80,5	44,1
1	22,0	10,8
1,5	7,5	5,6
2	3,2	3,8
2,5	1,6	2,9
3	1	2,4

Shewhart vs EWMA

$n = 5$

EWMA s parametry $\lambda = 0,2$ a $L = 3$

δ (nás. σ)	ARL (δ)	
	Shewhart	EWMA
0	370,4	559,9
0,5	16,7	8,9
1	2,2	3,3
1,5	0,8	2,2
2	0,5	1,7
2,5	0,5	1,3
3	0,5	1

Volba parametrů

L určuje vzdálenost regulačních mezí od centrální přímky

λ určuje váhu jednotlivých pozorování. Pro $\lambda = 0,2$ jsou váhy směrem ke starším pozorováním

0,2 0,16 0,128 0,1024

z_0 ovlivňuje hodnotu statistiky EWMA především u několika prvních pozorování (využití u FIR)

Doporučené hodnoty

$0,05 \leq \lambda \leq 0,25$ (často 0,05; 0,10; 0,20)

pro detekci menších posunů se volí menší λ

$L \approx 3$ (při $\lambda \leq 0,1$: $2,6 \leq L \leq 2,8$)

Lze využít tabulek či nomogramů (Crowder, 1989), částečně software

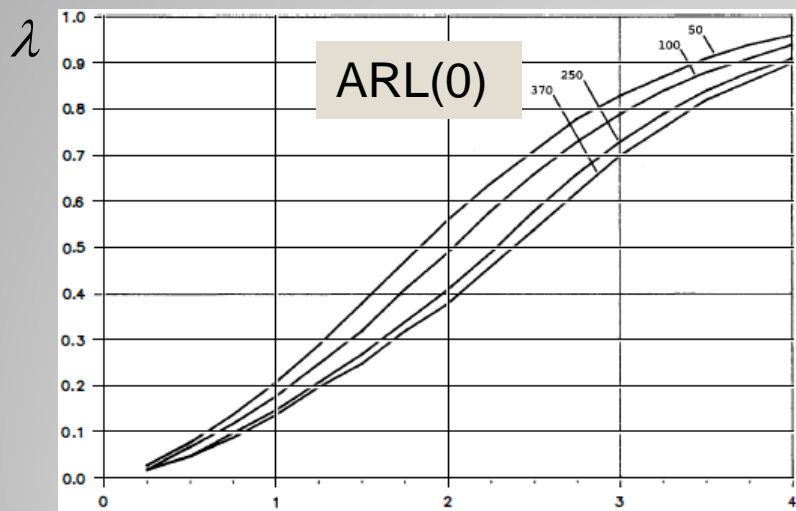
Průměrná doba přeběhu ARL v závislosti na λ a L

Average Run Lengths for Several EWMA Control Schemes
[Adapted from Lucas and Saccucci (1990)]

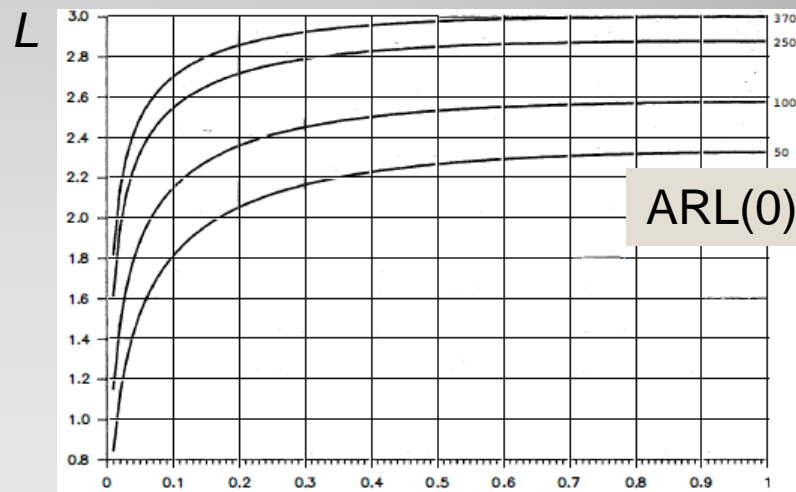
Shift in Mean (multiple of σ)	$L = 3.054$ $\lambda = 0.40$	2.998 0.25	2.962 0.20	2.814 0.10	2.615 0.05
0	500	500	500	500	500
0.25	224	170	150	106	84.1
0.50	71.2	48.2	41.8	31.3	28.8
0.75	28.4	20.1	18.2	15.9	16.4
1.00	14.3	11.1	10.5	10.3	11.4
1.50	5.9	5.5	5.5	6.1	7.1
2.00	3.5	3.6	3.7	4.4	5.2
2.50	2.5	2.7	2.9	3.4	4.2
3.00	2.0	2.3	2.4	2.9	3.5
4.00	1.4	1.7	1.9	2.2	2.7

Návrh diagramu pomocí nomogramů

Crowder, JQT 1989



posun δ



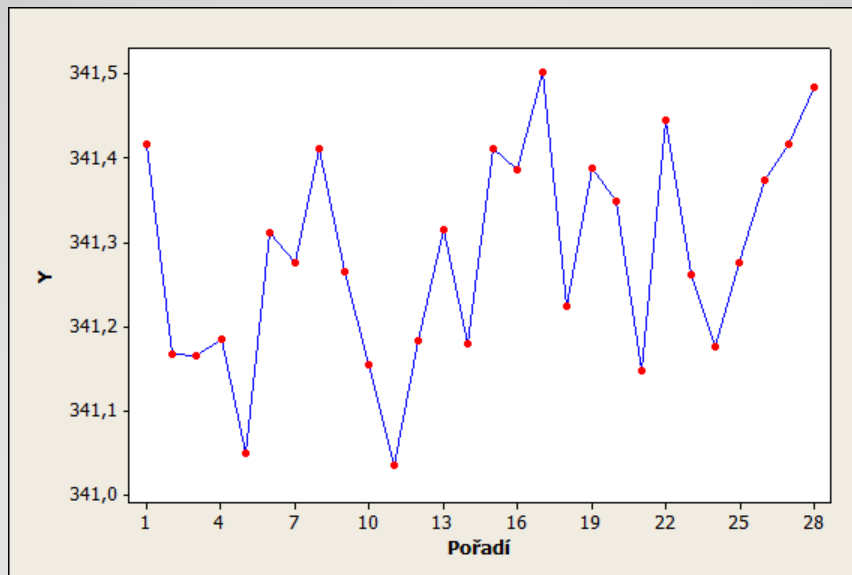
λ

Příklad

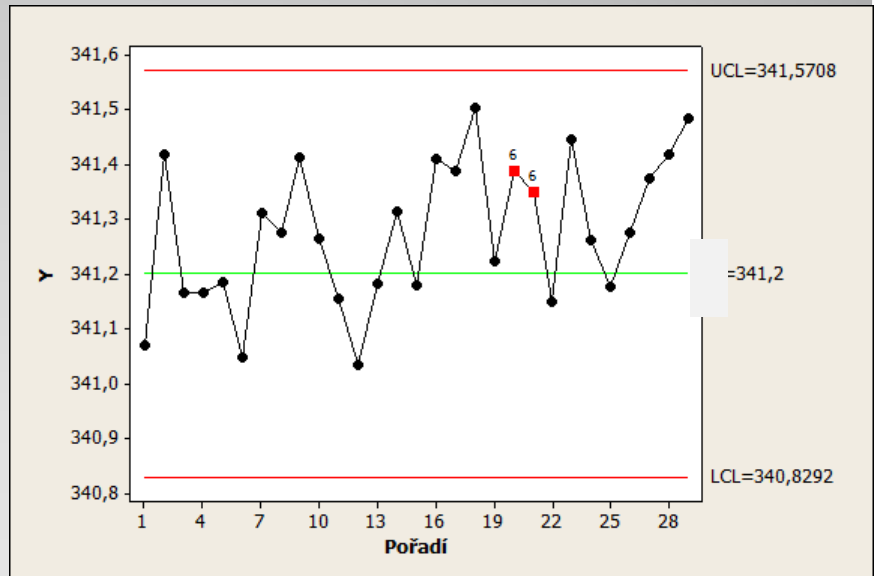
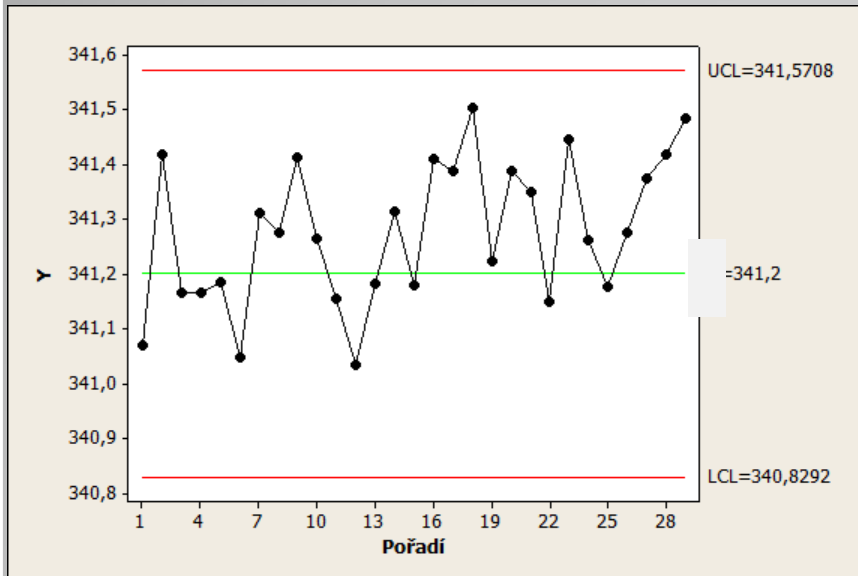
Řízení polohy závitového čepu pro uchycená zadního nárazníku v karoserii (jedna z os).

Předpokládejme cílovou hodnotu $\mu_0 = 341,2$, σ odhadneme z dat (stejně jako u Shewhartova diagramu pro individuální hodnoty).

Cíl: detekovat posun střední hodnoty procesu velikosti 1σ



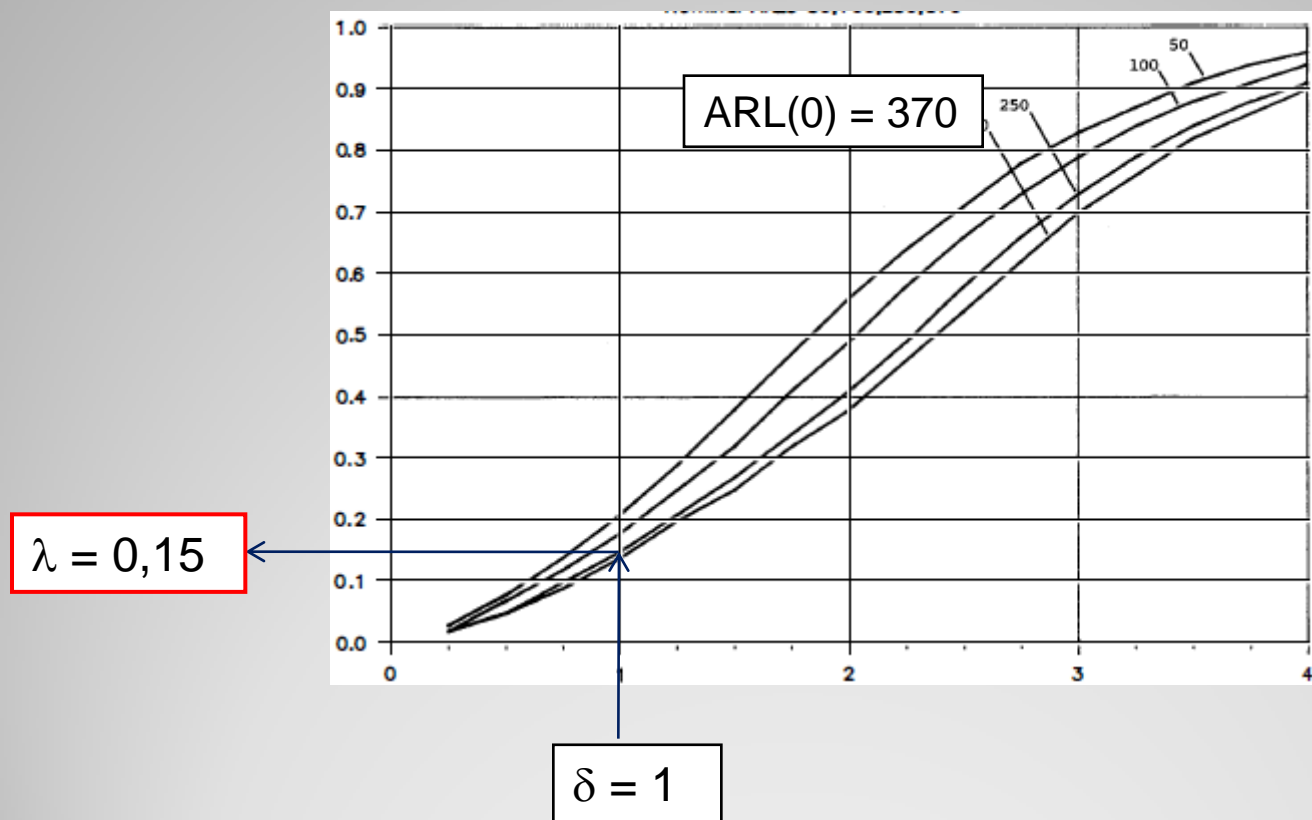
Shewhartův diagram



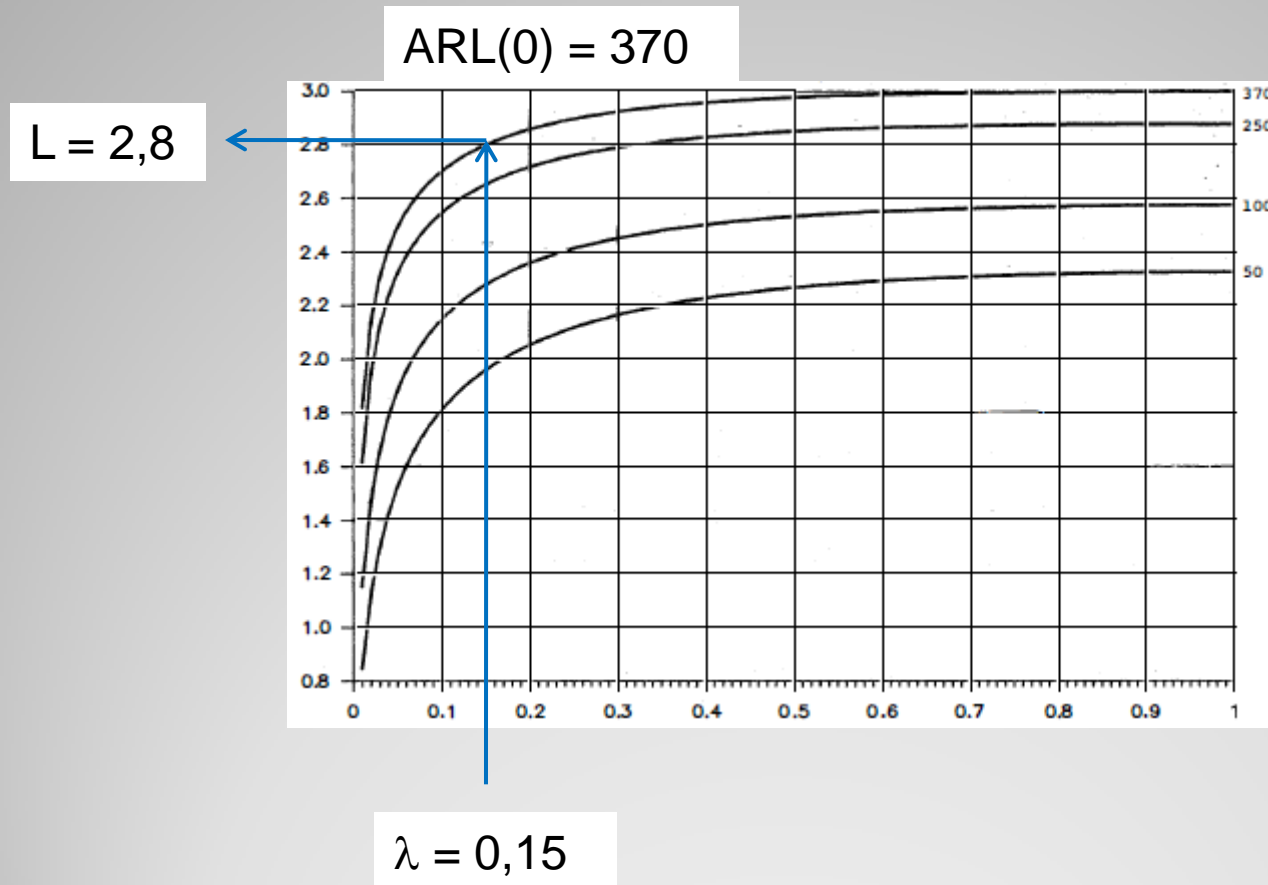
Regulační meze Shewhartova diagramu nejsou překročeny, testy seskupení upozorňují na možný posun střední hodnoty (4 z 5 v zóně B nebo za ní)

Návrh diagramu: volba lambda

Zvolíme $ARL(0) = 370$ (jako má Shewhartův diagram)

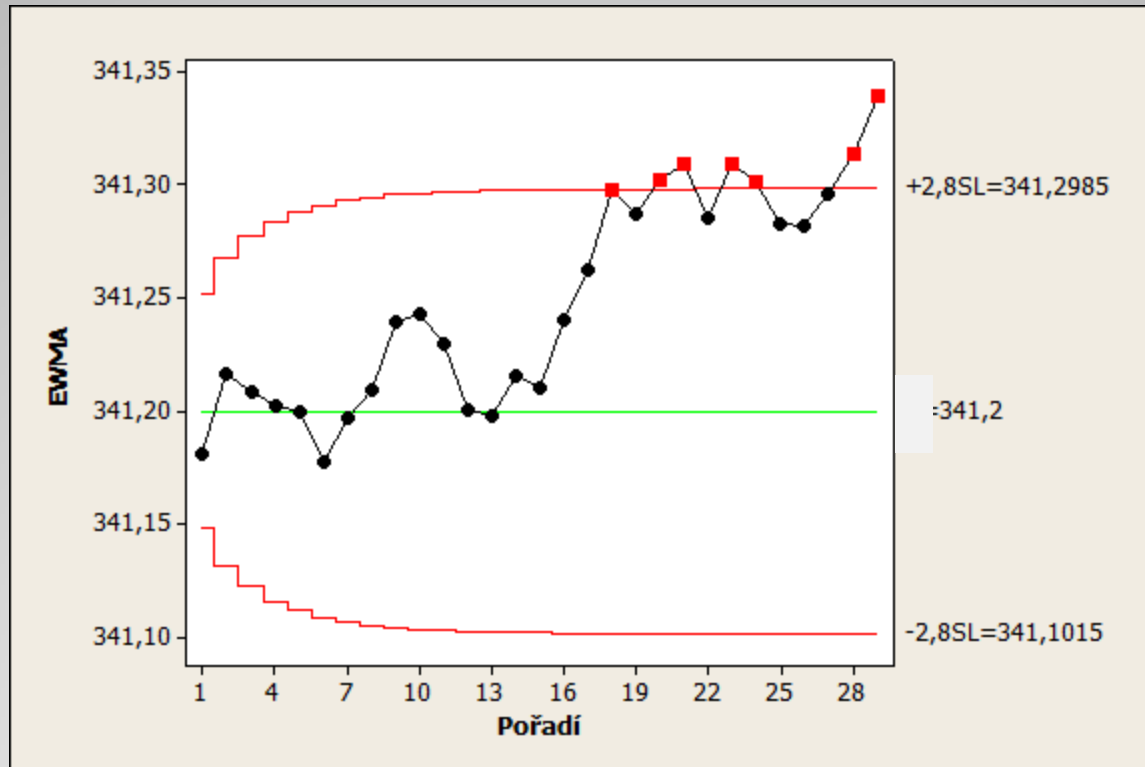


Návrh diagramu: volba L



EWMA diagram

$$\lambda = 0,15; L = 2,8$$



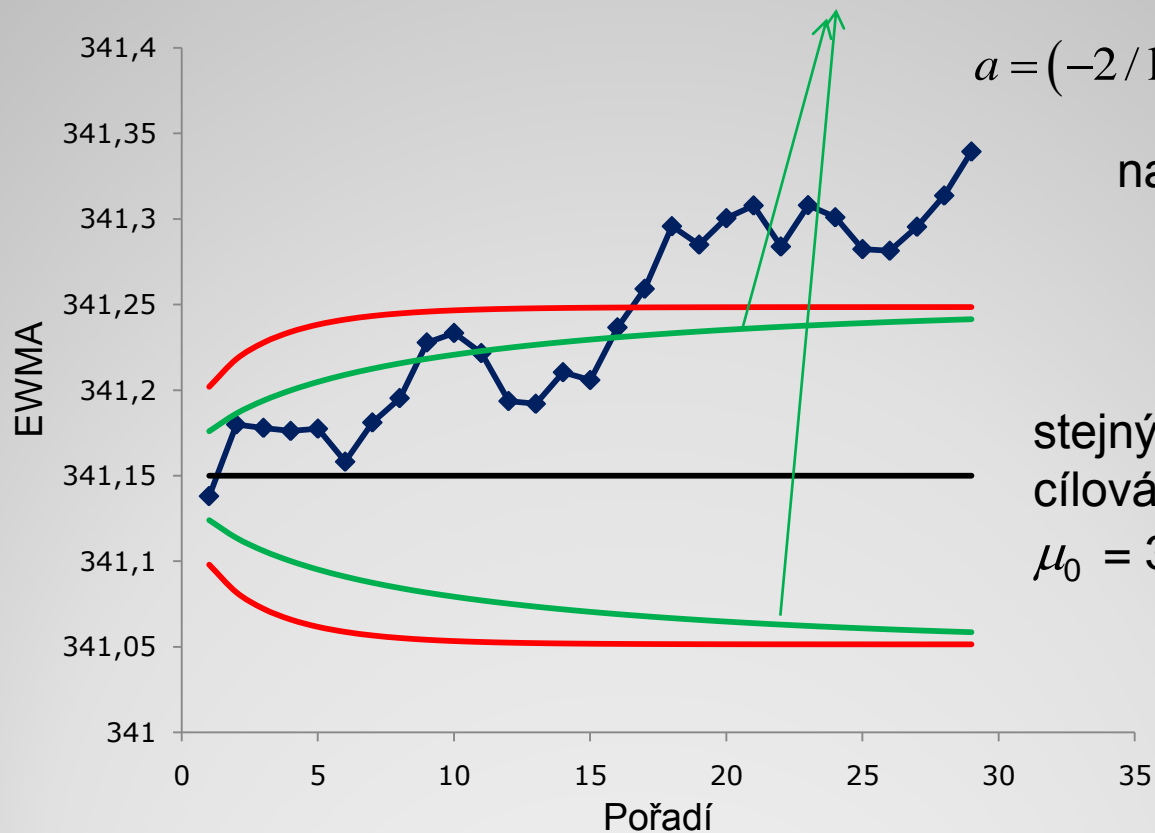
Zrychlení detekce počátečního posunu (FIR)

Steiner (1999)

$$\mu_0 \pm L\sigma_Y \left\{ \left(1 - (1-f)^{1+a(i-1)} \right) \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2i}]} \right\}$$

$$a = (-2 / \ln(1-f) - 1) / 19$$

např. $f = 0,5$



EWMA pro počet neshod jako náhrada c-diagramu?

Y – počet neshod

Předpoklad: Y má Poissonovo rozdělení $Po(\mu)$

$$E(Y) = D(Y) = \mu, \quad \sigma_Y = \sqrt{\mu}$$

Cílová hodnota μ_0

$$LCL_i = \mu_0 - L \sqrt{\frac{\lambda \mu_0}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]} \quad UCL_i = \mu_0 + L \sqrt{\frac{\lambda \mu_0}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]}$$

Shewhartův diagram

$$LCL = \mu_0 - 3\sqrt{\mu_0} \quad UCL = \mu_0 + 3\sqrt{\mu_0}$$

Porovnání ARL c-diagram vs EWMA

δ (nás. σ)	ARL (δ)		
	c přibl.	c přesně	EWMA
0	370,4	339,8	369,8
0,5	80,5	25,1	31,8
1	22,0	5	9,6
1,5	7,5	2	5,4
2	3,2	1,3	3,8
2,5	1,6	1,1	3,0
3	1	1	2,5

← pro $\mu_0 = 20$

pro $\mu_0 = 5$



přibližně pomocí aproximace
normálním rozdělením

přesně pomocí Poissonova
rozdělení

δ (nás. σ)	ARL (δ)		
	c přibl.	c přesně	EWMA
0	370,4	183,4	191,4
0,5	80,5	15,2	24,2
1	22,0	4	8,2
1,5	7,5	2	4,8
2	3,2	1,4	3,4
2,5	1,6	1,1	2,7
3	1	1	2,3

EWMA pro vysoce způsobilé procesy

Plynulá kontrola jednotek

Bernoulliho proces, $y_i = 0$ nebo 1 , $i = 1, 2, \dots$

Sleduje se počet jednotek do výskytu r -té neshodné (negativně binomické rozdělení nebo speciálně geometrické rozdělení)

p – podíl neshodných

$$LCL = \frac{r}{p_0} - L \frac{\sqrt{r(1-p_0)}}{p_0} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \quad UCL = \frac{r}{p_0} + L \frac{\sqrt{r(1-p_0)}}{p_0} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$$

Literatura

- Crowder, S.V. (1987), A Simple Method for Studying Run-Length Distribution of Exponentially Weighted Moving Average Control Charts, *Technometrics*, 29, pp. 401–407.
- Crowder, S.V., (1989), Design of Exponentially Weighted Moving Average Schemes, *Journal of Quality Technology*, Vol. 21, No. 3, pp. 155–162
- Kotani, T., Kusakawa, E. and Ohta, H., (2005), Exponentially Weighted Moving Average Chart for High-Yield Processes, *An International Journal of Industrial Engineering and Management Systems*, Vol. 4, No.1, pp.75-81
- Montgomery, D. C., (2009), *Statistical Quality Control: A Modern Introduction*, 6th ed., J. Wiley & Sons, Hoboken
- Steiner, S.H., (1999), EWMA Control Charts with Time-Varying Control Limits and Fast Initial Response, *Journal of Quality Technology*, Vol. 31, No. 1, pp. 75–86
- Xie, M., Goh, T. N. and Kuralmani, C., (2002), *Statistical Models and Control Charts for High Quality Processes*, Kluwer Academic Publishers, Norwel, Massachusetts
- Yeh, A. B., McGrath, R. N., Sembower, M. A. and Shen, Q., (2008), EWMA Control Charts for Monitoring High-yield Processes Based on Non-transformed Observations, *International Journal of Production Research*, Vol. 46, No. 20, pp. 5679-5699