



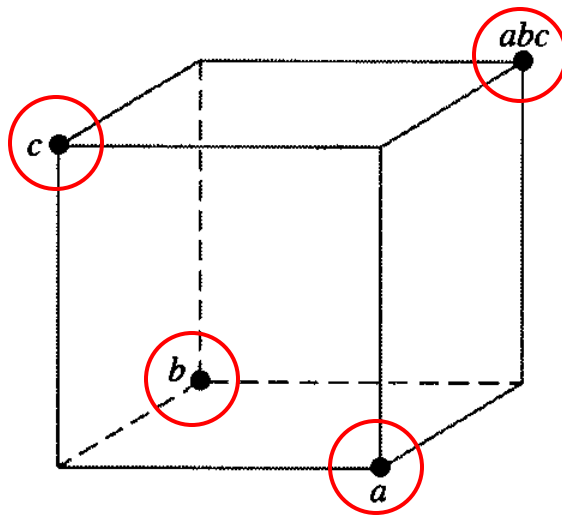
**Národní informační středisko
pro podporu jakosti**

Dílčí 2^k faktoriální návrhy

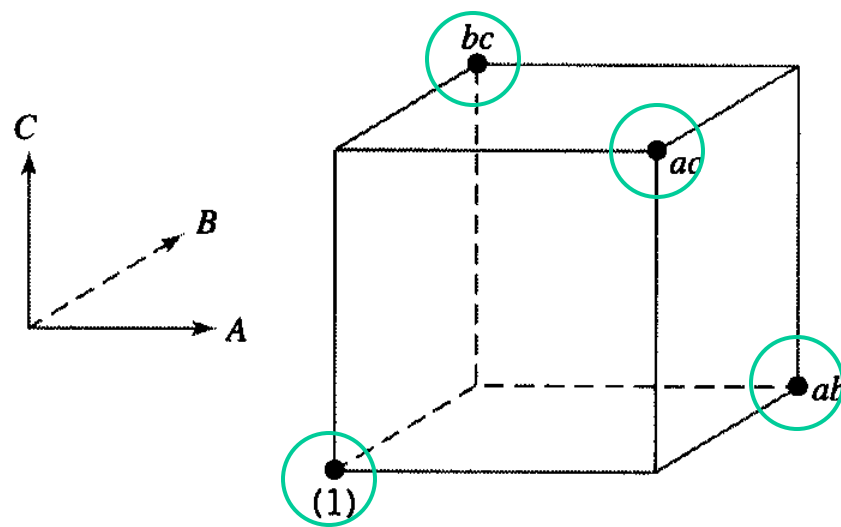
RNDr. Jiří Michálek, CSc.

Poloviční 2^k faktoriální návrh

- Obsahuje 2^{k-1} pokusů (runů)
- Často je také nazýván 2^{k-1} dílčí faktoriální návrh
- Uvažujme např. 2^{3-1} ; to je polovina z plného 2^3 návrhu.
- Geometricky můžeme tento poloviční 2^3 faktoriální návrh znázornit následovně



a) základní dílčí návrh
 $I = + ABC$



b) alternativní dílčí návrh
 $I = - ABC$

- Tabulka plus a minus znamének pro 2^3 faktoriální návrh se všemi hlavními efekty a interakcemi, ze které vybíráme čtyři kombinace ošetření a, b, c, a abc pro poloviční faktoriální návrh:

Kombinace ošetření	Efekty faktorů							
	I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
a	+	+	-	-	-	-	+	+
b	+	-	+	-	-	+	-	+
c	+	-	-	+	+	-	-	+
abc	+	+	+	+	+	+	+	+
ab	+	+	+	-	+	-	-	-
ac	+	+	-	+	-	+	-	-
bc	+	-	+	+	-	-	+	-
(1)	+	-	-	-	+	+	+	-

- Všimněme si, že vybrané kombinace ošetření dávají **plus** pro ABC efekt.
- ABC se nazývá „**generátor**“ této speciální části. Element identity I je rovněž kladný pro uvažované čtyři kombinace.
- Nazýváme $I = ABC$ „**určující vztah**“ pro tento návrh.
- Z tabulky dostáváme odhady hlavních efektů:

$$A = [a - b - c + abc] / 2$$

$$B = [-a + b - c + abc] / 2$$

$$C = [-a - b + c + abc] / 2$$

a interakcí druhého řádu

$$AB = [-a - b + c + abc] / 2$$

$$AC = [-a + b - c + abc] / 2$$

$$BC = [a - b - c + abc] / 2$$

- Lineární kombinace pozorování ve sloupci A, kterou označíme l_A odhaduje efekty $A + BC$, podobně l_B odhaduje $B + AC$ a l_C odhaduje $C + AB$. Dva nebo více efektů, které mají tuto vlastnost, se nazývají **neoddělitelné efekty (aliases)** .
- V uvažovaném 2^{3-1} návrhu jsou neoddělitelnými efekty A a BC; B a AC; C a AB.
- K nalezení neoddělitelných efektů lze použít „určující vztah“ $I = ABC$. Vynásobením kteréhokoliv efektu „určujícím vztahem“ dostaneme jemu odpovídající neoddělitelný efekt.

- Příklad některých **neoddělitelných efektů** :
 - Hlavní efekt faktoru A je neoddělitelný od efektu interakce BC

$$A \cdot I = A \cdot ABC = BC$$

to znamená, A je neoddělitelný efekt (identický) s interakcí BC

(platí $A \cdot I = A$ a $A^2 = I$).

Dále

hlavní efekt faktoru B je neoddělitelný od efektu interakce AC

$$\mathbf{B \cdot I = B \cdot ABC = AC}$$

to znamená, B je neoddělitelný efekt (identický)
s interakcí AC.

hlavní efekt faktoru C je neoddělitelný od efektu interakce AB

$$\mathbf{C \cdot I = C \cdot ABC = AB}$$

to znamená, C je neoddělitelný efekt (identický)
s interakcí AB.

Efekt interakce AB je neoddělitelný od hlavního efektu
faktoru C

$$\mathbf{AB \cdot I = AB \cdot ABC = C}$$

to znamená, AB je neoddělitelný efekt (identická) s
hlavním efektem C.

Předpokládejme nyní, že jsme vybrali druhou (dolní) polovinu návrhu, spojenou s - ABC. Určující vztah pro tuto polovinu je $l = - ABC$. Potom neoddělitelné efekty jsou $A = - BC$; $B = - AC$; $C = - AB$. V praxi není podstatné, kterou polovinu návrhu vybereme.

Ta část návrhu s kladným znaménkem se nazývá **základní část** (principal fraction), ta druhá se nazývá **alternativní část** (alternate fraction) návrhu.

Pro základní část návrhu jsou následující odhady efektů

$$l_A = A + BC ; l_B = B + AC ; l_C = C + AB .$$

Pro alternativní část návrhu jsou následující odhady efektů

$$l'_A = A - BC ; l'_B = B - AC ; l'_C = C - AB .$$

Při kombinaci odhadů z obou částí návrhu dostaneme:

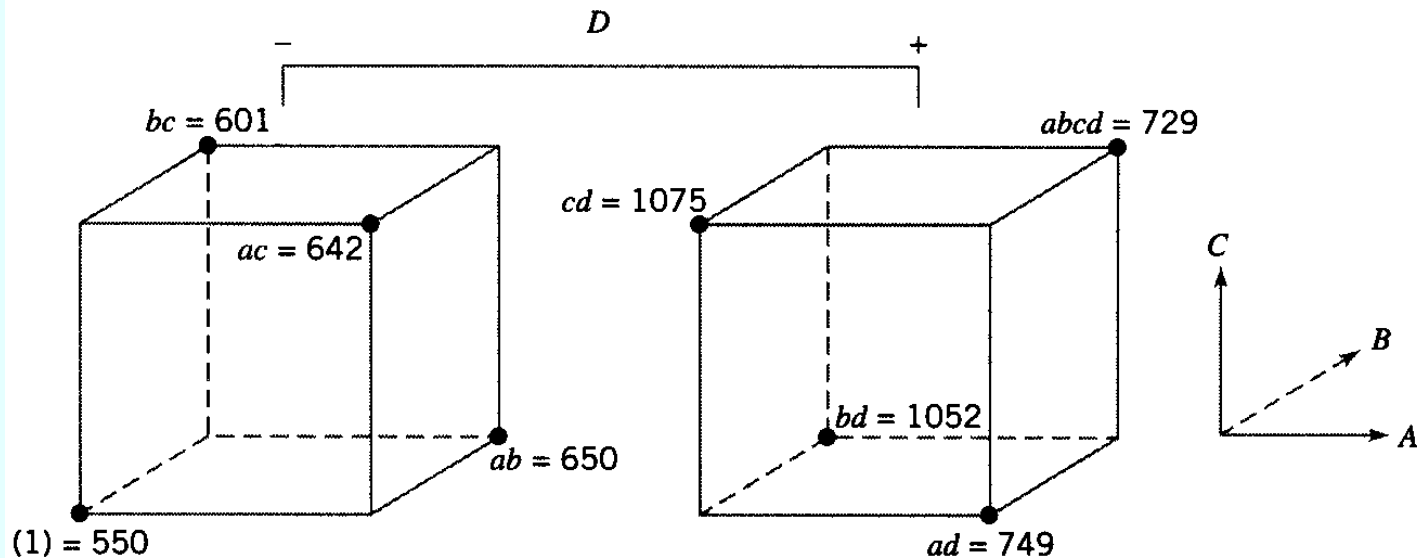
Efekt i	Odhad z $(l_i + l'_i)$	Odhad z $(l_i - l'_i)$
$i = A$	$(A + BC + A - BC)/2 = \mathbf{A}$	$(A + BC - (A - BC))/2 = \mathbf{BC}$
$i = B$	$(B + AC + B - AC)/2 = \mathbf{B}$	$(B + AC - (B - AC))/2 = \mathbf{AC}$
$i = C$	$(C + AB + C - AB)/2 = \mathbf{C}$	$(C + AB - (C - AB))/2 = \mathbf{AB}$

Při posloupnosti dvou dílčích návrhů můžeme izolovat jak efekty hlavních faktorů, tak efekty interakcí druhého řádu. To má praktický význam, jelikož můžeme provádět malé posloupnosti experimentů.

Příklad :

Pro ilustraci polovičního faktoriálního návrhu uvažujme experiment s procesem nitridového leptání. Rozhodneme se použít 2^{4-1} návrh s $I = ABCD$ pro zkoumání faktorů (A) mezera mezi anodou a katodou; (B) tlak v reakčním prostoru; (C) tok reakčního plynu C_2F_6 ; (D) výkon na katodě.

Návrh provedeme jako 2^3 faktoriální návrh s faktory A, B, C a položíme $D = ABC$. Návrh a výsledné rychlosti naleptání (odezva) jsou uvedeny v grafickém zobrazení



2⁴⁻¹ faktoriální návrh s určujícím vztahem I = ABCD

Pokus	Kombinace ošetření	Efekty faktorů				Rychlost leptání
		A	B	C	D = ABC	
1	(1)	-	-	-	-	550
2	ad	+	-	-	+	749
3	bd	-	+	-	+	1052
4	ab	+	+	-	-	650
5	cd	-	-	+	+	1075
6	ac	+	-	+	-	642
7	bc	-	+	+	-	601
8	abcd	+	+	+	+	729

V tomto návrhu jsou hlavní efekty neoddělitelné s interakcemi třetího řádu:

$$A = BCD; B = ACD; C = ABD; D = ABC$$

a interakce druhého řádu jsou neoddělitelné navzájem

$$AB = CD; AC = BD; AD = BC.$$

Odhady hlavních efektů (a jejich neoddělitelných efektů) najdeme s použitím čtyř sloupců znamének v uvedené tabulce. Ze sloupce A dostaneme

$$\begin{aligned} l_A &= A + BCD = (-550 + 749 - 1052 + 650 - 1075 + 642 - 601 + 729) / 4 \\ &= -127,00 . \end{aligned}$$

$$\text{Dále } l_B = B + ACD = 4,00 ;$$

$$l_C = C + ABD = 11,50 ;$$

$$l_D = D + ABC = 290,51 .$$

Efekty interakcí lze odhadnout tak, že vytvoříme sloupce AB, AC a AD a přidáme do uvedené tabulky

Pokus	Kombinace ošetření	Efekty faktorů							Rychlost leptání
		A	B	C	D = ABC	AB	AC	AD	
1	(1)	-	-	-	-	+	+	+	550
2	ad	+	-	-	+	-	-	+	749
3	bd	-	+	-	+	-	+	-	1052
4	ab	+	+	-	-	+	-	-	650
5	cd	-	-	+	+	+	-	-	1075
6	ac	+	-	+	-	-	+	-	642
7	bc	-	+	+	-	-	-	+	601
8	abcd	+	+	+	+	+	+	+	729

$$\text{potom } l_{AB} = AB + AC = (550-749-1052+650+1075-642-601+729) / 4 = -10,00.$$

$$\text{Podobně } l_{AC} = AC + BD = -25,50 \text{ a } l_{AD} = AD + BC = -197,50 .$$

- Normální pravděpodobnostní graf a residua
 - Normální pravděpodobnostní graf může být užitečný při ocenění významnosti efektů (zejména když je třeba odhadovat více efektů).
 - Residua mohou být získána z regresního modelu, jak již bylo ukázáno.
 - Residua by měla být zakreslována proti predikovaným hodnotám, proti úrovním faktorů a na normální pravděpodobnostní papír ze dvou důvodů:
 - Ocenit platnost předpokladů použitého modelu
 - Získat dodatečné porozumění experimentu.

- **Projekce 2^{k-1} návrhu**
 - Jestliže může být vynechán jeden nebo více faktorů z polovičního 2^k návrhu, návrh se převede (promítne) na úplný faktoriální návrh.
 - Taková projekce je velmi užitečná při ověření experimentů.
 - V případě plasmového leptání jsme zjistili, že dva ze čtyř faktorů (B a C) mohou být opomenuty a může být použit 2^2 faktoriální experiment pro faktory A a D se dvěma replikacemi.

- **Typy rozlišení návrhů**
 - Rozlišení návrhů je užitečné při kategorizaci návrhů.
 - Rozlišení návrhů je obvykle označováno římskými číslicemi.
 - Rozlišení návrhů zvláštní důležitosti jsou označovány jako rozlišení typu III, IV a V.
 - Rozlišení návrhů ukazuje jinak též vztah mezi faktory a jejich interakcemi.

– **Rozlišení typu III** (Resolution III designs).

Každý hlavní efekt je oddělitelný s kterýmkoliv jiným hlavním efektem. Hlavní efekty jsou neoddělitelné s efekty interakcí druhého řádu a efekty interakcí druhého řádu mohou být neoddělitelné navzájem. 2^{3-1} návrh s I = ABC je typu rozlišení III a označuje se 2_{III}^{3-1} .

– **Rozlišení typu IV** (Resolution IV designs).

Každý hlavní efekt je oddělitelný s kterýmkoliv jiným hlavním efektem a efektem interakcí druhého řádu. Interakce druhého řádu jsou neoddělitelné navzájem.

2^{4-1} návrh s I = ABCD je typu rozlišení IV (2_{IV}^{4-1}).

– **Rozlišení typu V (Resolution V designs).**

Každý hlavní efekt je oddělitelný s kterýmkoliv jiným hlavním efektem a efektem interakcí druhého řádu.

Interakce druhého řádu jsou navzájem oddělitelné.

Interakce druhého řádu jsou neoddělitelné s interakcemi třetího řádu.

2^{5-1} návrh s $I = ABCDE$ je typu rozlišení V (2_{V}^{5-1}).

Například, značení 2_{III}^{3-1} ukazuje, že se jedná o poloviční 2^3 návrh s rozlišením typu III. Z toho víme, že hlavní efekty jsou navzájem oddělitelné, ale jsou neoddělitelné s interakcemi druhého řádu.

Dílčí 2^{k-p} faktoriální návrhy

- Ačkoli poloviční faktoriální návrhy jsou užitečné, může být **více ekonomické** používat dokonce **menší** jak poloviční 2^k faktoriální návrhy.
- Uvažujme návrh s **$k = 11$** faktory.
 - Plný 2^k návrh by vyžadoval 2 048 pokusů
 - Poloviční 2^{k-1} návrh by vyžadoval 1 024 pokusů: stále nerozumný počet pokusů.
- Co tak návrh pro všech 11 faktorů, který by požadoval pouze 32 pokusů ? Některé předpoklady je třeba učinit, ale jedná se o možný návrh.
 - **11 faktorů ve 32 pokusech by byl 2^{11-6} návrh.**

Poznámka:

2^k návrh může probíhat jako 2^{k-p} dílčí faktoriální návrh (v $1/2^p$ částech).

Na př. pro $p = 6$ se jedná o 2^{k-6} dílčí faktoriální návrh, což představuje část $1/2^6 = 1/64$ z plného faktoriálního návrhu 2^k .

Pro $k = 11$ je to počet pokusů $2^{11} / 64 = 2048 / 64 = 32$, tj. $2^{11-6} = 2^5 = 32$.

Pro poloviční návrh $1/2$ je $p = 1$ a tedy 2^{k-1} ;

pro čtvrtinový návrh $1/4$ je $p = 2$ a tedy 2^{k-2} ;

pro osminový návrh $1/8$ je $p = 3$ a tedy 2^{k-3} ;

pro šestnáctinový návrh $1/16$ je $p = 4$ a tedy 2^{k-4} ; atd.

pro návrh $1/64$ je $p = 6$ a tedy 2^{k-6} .

- Sestavení 2^{k-p} návrhu vyžaduje:
 - Sestavit plný faktoriální návrh pro $k-p$ faktorů.
 - Vytvořit zbylých p sloupců vybráním vhodných **generátorů dílčího návrhu**.

Pro ilustraci budeme uvažovat 1/4 návrh experimentu se šesti faktory. Experimentátor se zajímá o efekty hlavních faktorů, ale rád by získal i informaci o interakcích druhého řádu.

2^6 návrh by vyžadoval 64 kombinací ošetření, poloviční návrh 2^{6-1} by vyžadoval 32 kombinací ošetření a měl by 31 stupňů volnosti pro odhad efektů. Jelikož je pouze 6 hlavních efektů a 15 interakcí druhého řádu, vyžaduje tento poloviční návrh příliš mnoho kombinací ošetření.

Uvažujme tedy čtvrtinový návrh, tj. 2^{6-2} návrh. Ten bude vyžadovat 16 kombinací ošetření a 15 stupňů volnosti pro odhad hlavních efektů.

Abychom vygenerovali potřebný návrh, napíšeme plný 2^4 návrh pro faktory A, B, C a D a pak přidáme dva sloupce pro faktory E a F. Pro jejich vytvoření vybereme dva generátory návrhu $I = ABCE$ a $I = BCDF$. Tak sloupec E = ABC a sloupec F = BCD.

Konstrukce 2^{6-2} návrhu s generátory $I = ABCE$ a $II = BCDF$

(Run)	A	B	C	D	E = ABC	F = BCD	ABCE	BCDF	ADEF
1	-	-	-	-	-	-	+	+	+
2	+	-	-	-	+	-	+	+	+
3	-	+	-	-	+	+	+	+	+
4	+	+	-	-	-	+	+	+	+
5	-	-	+	-	+	+	+	+	+
6	+	-	+	-	-	+	+	+	+
7	-	+	+	-	-	-	+	+	+
8	+	+	+	-	+	-	+	+	+
9	-	-	-	+	-	+	+	+	+
10	+	-	-	+	+	+	+	+	+
11	-	+	-	+	+	-	+	+	+
12	+	+	-	+	-	-	+	+	+
13	-	-	+	+	+	-	+	+	+
14	+	-	+	+	-	-	+	+	+
15	-	+	+	+	-	+	+	+	+
16	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Pro nalezení **úplného určujícího vztahu** (**complete defining relation**), je třeba vynásobit všechny páry generátorů návrhů (v tomto případě jsou to pouze dva, tak že vynásobíme $(ABCE)(BCDF) = ADEF$)

Pro nalezení **úplného určujícího vztahu**, ze kterého mohou být nalezeny **všechny neoddělitelné efekty** pro hlavní efekty a interakce je:

$$\underline{I = ABCE = BCDF = ADEF}$$

Podle definice délka nejmenšího „**slova**“ (**word**) v určujícím vztahu je rovněž *typ rozlišení návrhu*.
V tomto případě je rozlišení typu IV.

Sloupce ABCE a BCDF jsou identické, stejně jako sloupec ADEF (který je jejich součinem). **Úplný určující vztah** pro 2^{6-2} návrh je

$$I = ABCE = BCDF = ADEF .$$

Abychom našli neoddělitelné efekty (alias) ke všem efektům, vynásobíme efekty každé slovo v uvedeném určujícím vztahu a dostaneme úplnou strukturu neoddělitelných efektů:

A	=	BCE	=	DEF	=	ABCDF	AB	=	CE	=	ACDF	=	BDEF
B	=	ACE	=	CDF	=	ABDEF	AC	=	BE	=	ABDF	=	CDEF
C	=	ABE	=	BDF	=	ACDEF	AD	=	EF	=	BCDE	=	ABCF
D	=	BCF	=	AEF	=	ABCDE	AE	=	BC	=	DF	=	ABCDEF
E	=	ABC	=	ADF	=	BCDEF	AF	=	DE	=	BCEF	=	ABCD
F	=	BCD	=	ADE	=	ABCEF	BD	=	CF	=	ACDE	=	ABEF
ABD	=	CDE	=	ACF	=	BEF	BF	=	CD	=	ACEF	=	ABDE
ACD	=	BDE	=	ABF	=	CEF							

V tomto případě se jedná o rozlišení typu IV, hlavní efekty jsou neoddělitelné s interakcemi třetího a vyšších řádů, interakce druhého řádu jsou neoddělitelné navzájem. Návrh poskytuje dobrou informaci o hlavních efektech a o síle interakcí druhého řádu.

- Výběr generátorů návrhu
 - Generátory návrhu nemohou být vybírány náhodně.
 - Výběr nesprávného generátoru návrhu může vyústit v návrh s nižší úrovní rozlišení, než by bylo možné.
 - Vybírat generátory návrhu tak, aby vyústily ve vyšší možný typ rozlišení návrhu.

Příklad :

Jednotky vyráběné v procesu tváření vstřikováním se podle zkušenosti příliš smršťují. Tím vzniká problém na montážních operacích. Bylo rozhodnuto realizovat experiment s cílem zmenšit smršťování součástí. Bylo rozhodnuto zkoumat sedm faktorů: (A) - teplota formy; (B) - rychlost šroubu; (C) - vyčkávací doba; (D) - doba cyklu; (E) - vlhkost; (F) - velikost vstupu a (G) - tlak. Každý faktor je nastavitelný na dvě úrovně.

Bylo rozhodnuto realizovat 16 kombinací dvouúrovňového faktoriálního návrhu.

Byl zvolen 2_{IV}^{7-3} návrh s generátory $I = ABCE$, $I = BCDF$ a $I = ACDG$. Tento návrh je uveden v následující tabulce:

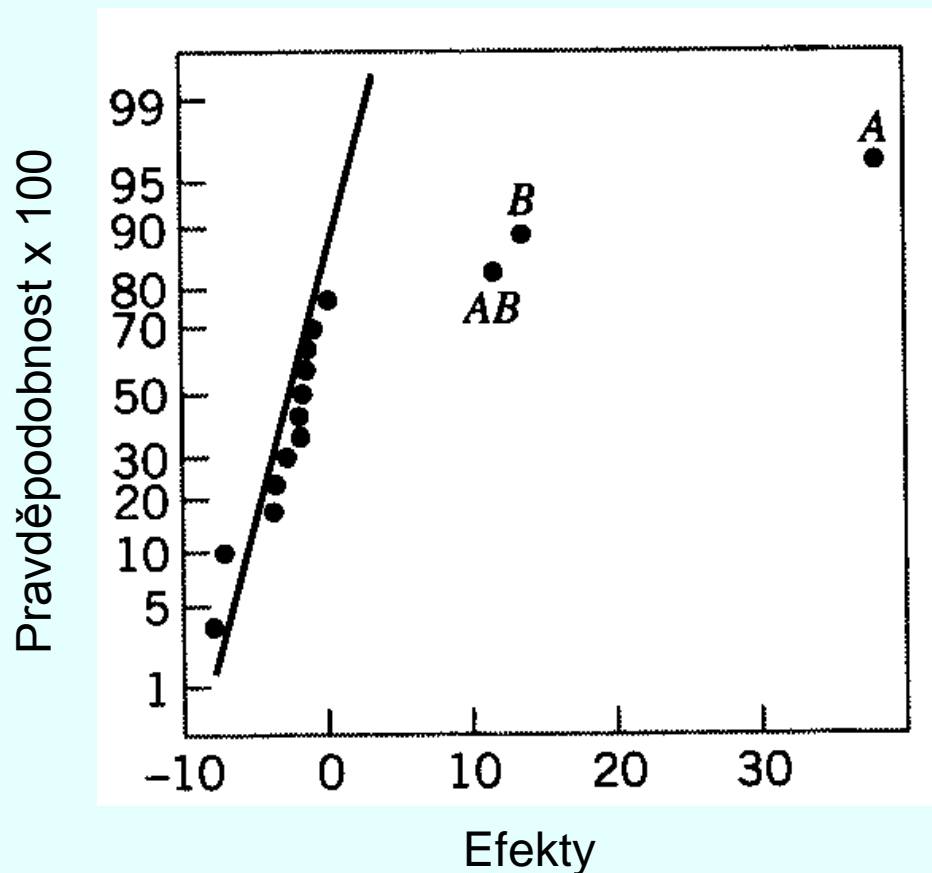
2_{IV}^{7-3} návrh pro proces tváření vstřikováním
s generátory I = ABCE, I = BCDF a I = ACDG

(Run)	A	B	C	D	E = ABC	F = BCD	G = ACD	Smršťování (x10)
1	-	-	-	-	-	-	-	6
2	+	-	-	-	+	-	+	10
3	-	+	-	-	+	+	-	32
4	+	+	-	-	-	+	+	60
5	-	-	+	-	+	+	+	4
6	+	-	+	-	-	+	-	15
7	-	+	+	-	-	-	+	26
8	+	+	+	-	+	-	-	60
9	-	-	-	+	-	+	+	8
10	+	-	-	+	+	+	-	12
11	-	+	-	+	+	-	+	34
12	+	+	-	+	-	-	-	60
13	-	-	+	+	+	-	-	16
14	+	-	+	+	-	-	+	5
15	-	+	+	+	-	+	-	37
16	+	+	+	+	+	+	+	52

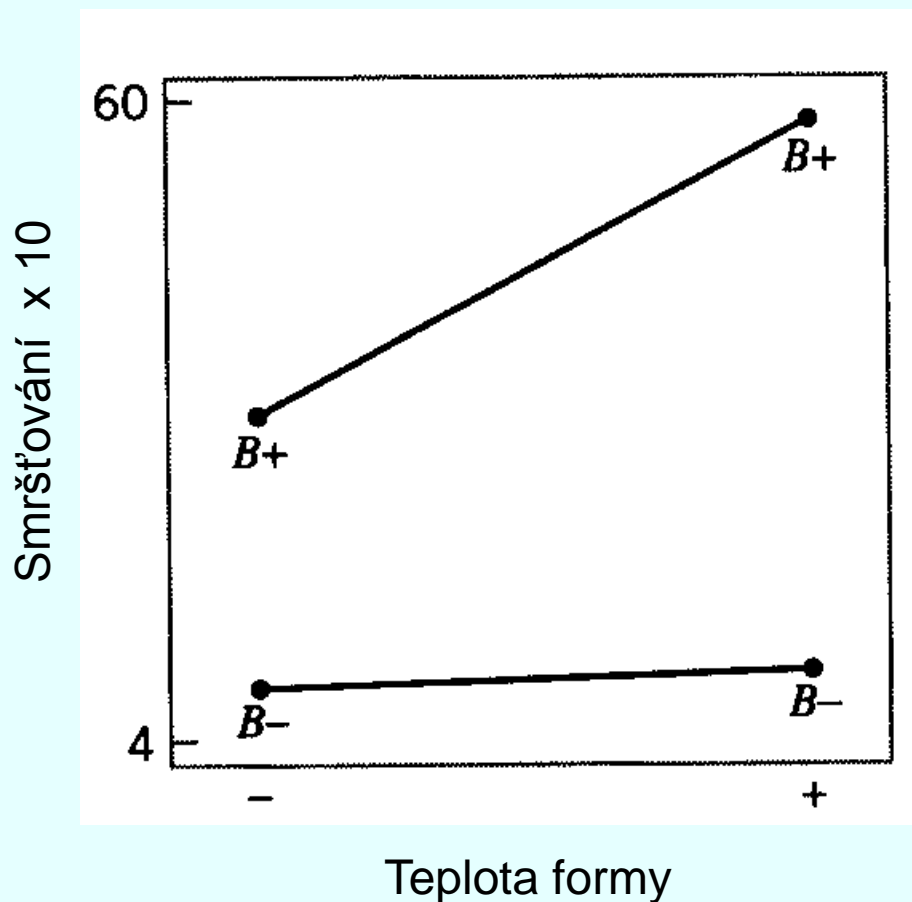
Seznam neoddělitelných efektů pro 2_{IV}^{7-3} návrh
s generátory I = ABCE, I = BCDF a I = ACDG
(a identickými generátory I = ADEF, I = BDEG, I = ABFG)

A	=	BCE	=	DEF	=	CDG	=	BFG	AB	=	CE	=	FG	
B	=	ACE	=	CDF	=	DEG	=	AFG	AC	=	BE	=	DG	
C	=	ABE	=	BDF	=	ADG	=	EFG	AD	=	EF	=	CF	
D	=	BCF	=	AEF	=	ACG	=	BEG	AE	=	BC	=	DF	
E	=	ABC	=	ADF	=	BDG	=	CFG	AF	=	DE	=	BG	
F	=	BCD	=	ADE	=	ABG	=	CEG	AG	=	CD	=	BF	
G	=	ACD	=	BDE	=	ABF	=	CEF	BD	=	CF	=	EG	
		ABD	=	CDE	=	ACF	=	BEF	=	BCG	=	AEG	=	DFG

Vypočítané odhady efektů jsou zakresleny do pravděpodobnostního grafu, který upozorňuje na velké efekty A = 13,875 (teplota formy) a B = 35,625 (rychlost šroubu) a interakci AB = 11,875.



Interakce AB ukazuje, že proces je necitlivý na teplotu (A), pokud rychlost šroubu (B) je na dolní úrovni, je však velmi citlivý na teplotu, pokud rychlost šroubu je na horní úrovni.

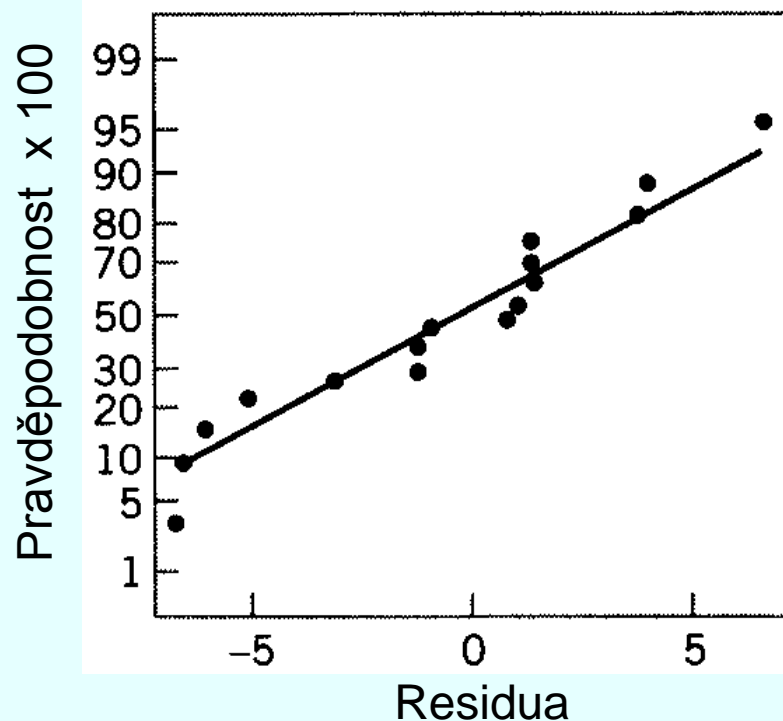


Zakreslená rezidua do pravděpodobnostního grafu ukazují uspokojivé přibližně normální rozdělení reziduí.

Residua byla počítána pro model (první přiblížení) z predikovaného smršťování

$$\hat{y} = 27,3125 + 6,9375 x_1 + 17,8125 x_2 + 5,9375 x_1 x_2 ,$$

kde x_1 , x_2 a x_1x_2 jsou kódované proměnné odpovídající faktorům A, B a interakci AB. Residua jsou potom $\varepsilon = y - \hat{y}$.



Graf residuí proti vyčkávací době (C) ukazuje, že je mnohem menší rozptýlení reziduí pro dolní úroveň vyčkávací doby než pro horní úroveň. Nastavení faktoru C na dolní úroveň sníží variabilitu v procesu.

