Národní informační středisko pro podporu jakosti

Konzultační středisko statistických metod při NIS-PJ

Výpočet koeficientů regulačních diagramů pro obecné riziko

Ing. Václav Chmelík, CSc

Ústav strojírenské technologie, ČVUT Praha

Ing. Jiří Tonar

Ústav strojírenské technologie, ČVUT Praha

15. června 2006

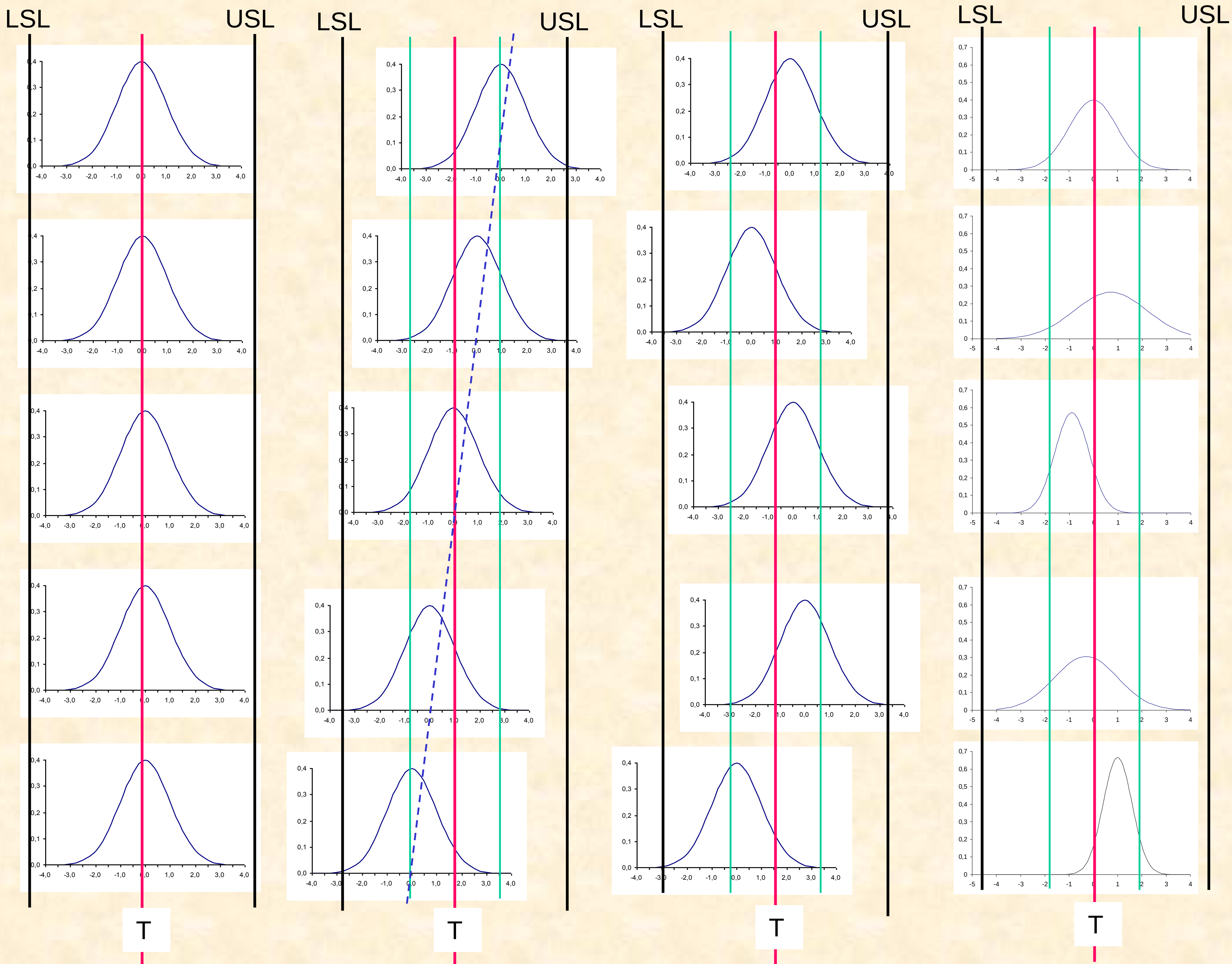
Shewhartův regulační diagram patří mezi hlavní, a také i nejvíce používané nástroje statistické regulace. Celá jeho teorie a metodika je rámcově shrnuta a popsána v normě Shewhartovy regulační diagramy ČSN ISO 8258.

Základní předpoklad pro použití Shewhartova regulačního diagramu:

!

Předpokládá se **normální rozdělení** sledovaného znaku jakosti N(μ, σ^2) se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Za **statisticky zvládnutý proces** se považuje ten, kde parametry **μ a σ se v čase nemění**.

Jestliže tedy, sledovaný znak jakosti má nenormální rozdělení, musí být použity jiné diagramy, nebo modifikované Shewhartovi diagramy. To je jedna ze zásadních chyb, která bývá opomínána.


LSL
USL
LSL
USL
LSL
USL
LSL
USL
T
T
T
T

Regulační diagramy se skládají z :

- ***centrální přímku (CL – central line):***

  charakterizující polohu střední hodnoty výběrové charakteristiky v daném procesu;

- ***regulační meze (UCL, LCL – upper, lower control limit):***

  přímky ohraničující prostor přípustného náhodného kolísání hodnot příslušné výběrové charakteristiky.

Regulační meze jsou vypočítány tak, že se připouští riziko α ,to jest riziko, že se vyskytne náhodně hodnota výběrové charakteristiky nad UCL, resp. pod LCL (mimo regulační meze), za předpokladu, že proces je statisticky zvládnut.

Princip Shewhartova regulačního diagramu:

Norma ČSN ISO 8258: „*Shewhartovy regulační diagramy*" zahrnuje dva základní typy Shewhartových regulačních diagramů:

- regulační diagramy při kontrole měřením (**RD měřením**) :

  $(\bar{x}, R)$; $(\bar{x}, s)$; (Me, R); (x_i, MR);

  používají se vždy ve dvojici, první pro popis polohy a druhý charakterizující mněnlivost

- regulační diagramy při kontrole srovnáváním (**RD srovnáváním**):

  (p); (np); (c); (u).

V obou případech se uvažují dva přístupy:

- základní hodnoty jsou stanoveny (**„technické" regulační meze**).

  (*hodnoty parametrů μ, σ jsou dány předem*)

- základní hodnoty nejsou stanoveny (**„přirozené" regulační meze**);

  (*hodnoty parametrů μ, σ musíme odhadnout z daného procesu*)

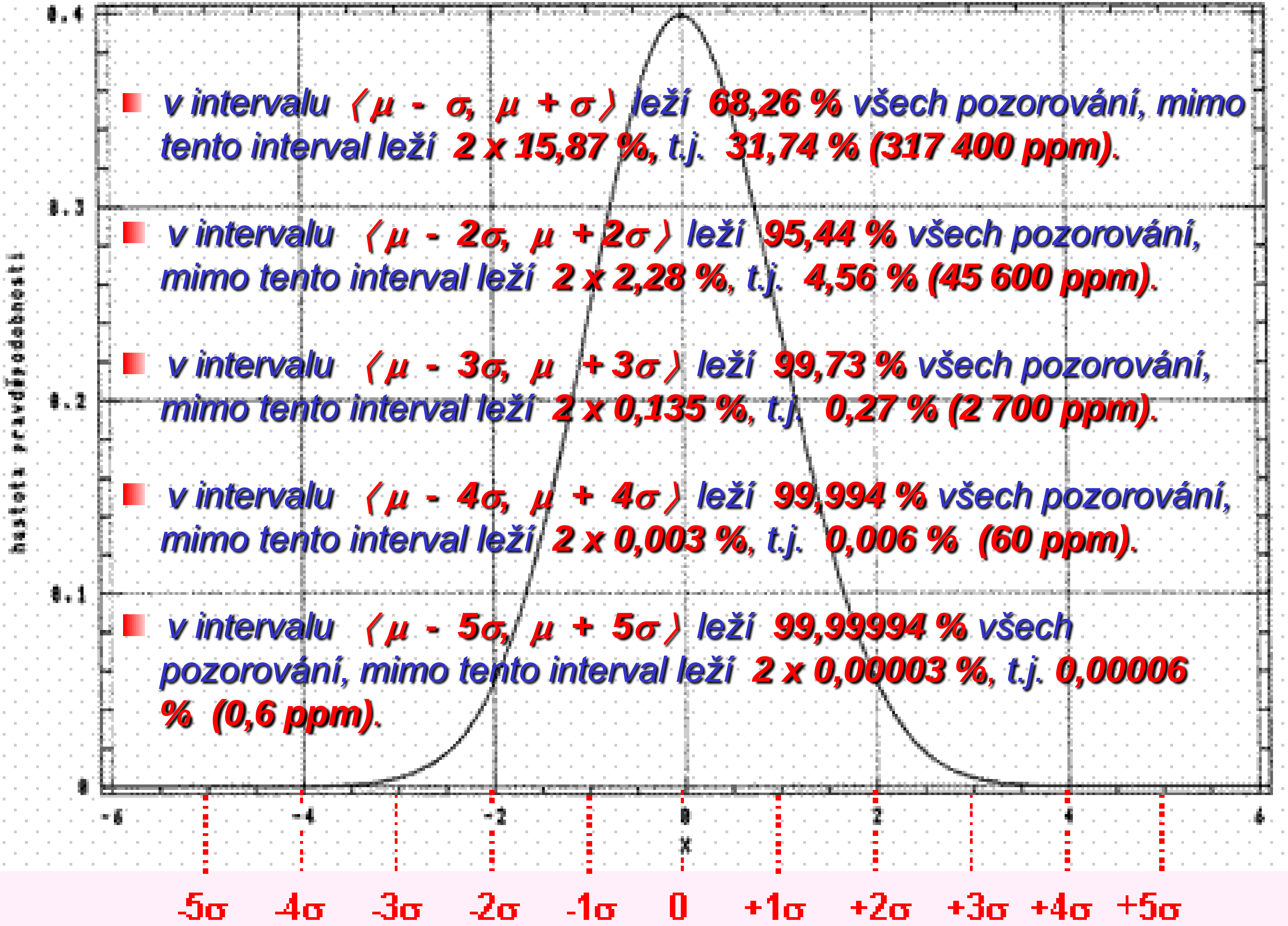
Vzorce pro výpočet regulačních mezí jsou uvedeny v **ČSN ISO 8258: *Shewhartovy regulační diagramy*** v tabulce 1 a 3, příslušné koeficienty pro jejich výpočet v tabulce 2 a 4.

Statistika	Základní hodnoty nejsou stanoveny		Základní hodnoty jsou stanoveny	
	Centrální přímka	UCL a LCL	Centrální přímka	UCL a LCL
$\overline{X}$	$\overline{\overline{X}}$	$\overline{\overline{X}} \pm A_2\overline{R}$ $\overline{\overline{X}} \pm A_3\overline{s}$	X_0 nebo μ_0	$X_0 \pm A\sigma_0$
R	$\overline{R}$	$D_4\overline{R}\,, D_3\overline{R}$	R_0 nebo $d_2\sigma_0$	$D_2\sigma_0$ nebo $D_1\sigma_0$
s	$\overline{s}$	$B_4\overline{s}\,, B_3\overline{s}$	s_0 nebo $C_4\sigma_0$	$B_2\sigma_0$ nebo $B_1\sigma_0$
X_i	$\overline{X_i}$	$\overline{X_i} \pm E_2\overline{R}$	X_0 nebo μ_0	$X_0 \pm 3\sigma_0$
MR	$\overline{MR}$	$D_4\overline{R}\,, D_3\overline{R}$	R_0 nebo $d_2\ \sigma_0$	$D_2\sigma_0$ nebo $D_1\sigma_0$

Rozdělení uvažovaných výběrových charakteristik je vždy aproximováno normálním rozdělením a regulační meze jsou stanoveny ve vzdálenosti ± 3 směrodatné odchylky od střední hodnoty (na každou stranu) použité výběrové charakteristiky.

Číslo 3 je kvantil normovaného normálního rozdělení odpovídající riziku α = 0,00135 „planého poplachu", takto zvolené Walterem Shewhartem. Z tohoto rozdělení (normovaného normálního) vyplývá, že pro riziko α = 0,00135 leží 99,7% případů uvnitř mezí a 0,3% mimo meze (neboli 3 případy z 1000 se vyskytují mimo meze).

- v intervalu 〈μ - σ, μ + σ〉 leží **68,26 %** všech pozorování, mimo tento interval leží **2 x 15,87 %**, t.j. **31,74 % (317 400 ppm)**.
- v intervalu 〈μ - 2σ, μ + 2σ〉 leží **95,44 %** všech pozorování, mimo tento interval leží **2 x 2,28 %**, t.j. **4,56 % (45 600 ppm)**.
- v intervalu 〈μ - 3σ, μ + 3σ〉 leží **99,73 %** všech pozorování, mimo tento interval leží **2 x 0,135 %**, t.j. **0,27 % (2 700 ppm)**.
- v intervalu 〈μ - 4σ, μ + 4σ〉 leží **99,994 %** všech pozorování, mimo tento interval leží **2 x 0,003 %**, t.j. **0,006 % (60 ppm)**.
- v intervalu 〈μ - 5σ, μ + 5σ〉 leží **99,99994 %** všech pozorování, mimo tento interval leží **2 x 0,00003 %**, t.j. **0,00006 % (0,6 ppm)**.



Obecné vztahy pro stanovení centrální přímky a regulačních mezí

Obecně aproximujeme rozdělení pravděpodobnosti výběrových charakteristik (statistik) normálním rozdělením. Centrální přímka odpovídá úrovni střední hodnoty výběrové charakteristiky a regulační meze jsou stanoveny symetricky ve vzdálenosti $u_{1-\alpha}$ směrodatné odchylky od centrální přímky.

($u_{1-\alpha}$ … je kvantil normovaného normálního rozdělení)

Označíme-li použitou statistiku $\mathbf{X}$, potom:

$$\boxed{CL = E(\mathbf{X})}$$

$$\boxed{\begin{aligned} UCL &= E(\mathbf{X}) + u_{1-\alpha}\sqrt{D(\mathbf{X})} \\ LCL &= E(\mathbf{X}) - u_{1-\alpha}\sqrt{D(\mathbf{X})} \end{aligned}}$$

Takto stanovené regulační meze pracují s rizikem α „planého poplachu“, riziko že se náhodně vyskytne hodnota výběrové charakteristiky mimo stanovené meze (nad UCL nebo pod LCL).

REGULAČNÍ DIAGRAMY MĚŘENÍM

DIAGRAMY PRO MĚŘÍTELNÉ ZNAKY

Individuální hodnoty x_i

Rozdělení individuálních hodnot sledovaného znaku jakosti je normální N (μ, σ^2) se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 (směrodatnou odchylkou σ).

- Pro známé hodnoty obou parametrů μ_0 a σ_0 je

$CL = \mu_0$; $UCL = \mu_0 + u_{1-\alpha}\,\sigma_0 = \mu_0 + A^*(n)\,\sigma_0$;

$LCL = \mu_0 - u_{1-\alpha}\,\sigma_0 = \mu_0 - A^*(n)\,\sigma_0$.

Koeficient $\boxed{A^*(n) = u_{1-\alpha}}$ kde $u_{1-\alpha}$ je (1-α) - kvantil normovaného normálního rozdělení. Shewhartovy regulační diagramy pracují s rizikem $\alpha = 0{,}00135$ vzhledem ke každé z obou mezí, tedy $u_{1-\alpha} = 3$.

Pro neznámé hodnoty obou parametrů musí být tyto parametry odhadnuty pomocí výběrového průměru $\mu \equiv \bar{x}$ a průměrného klouzavého rozpětí dvou sousedních pozorování $\sigma \equiv \bar{R} / d_2(n)$.

Potom

$$CL = \mu = \bar{x} \; ; \qquad UCL = \mu + u_{1-\alpha}\,\sigma = \bar{x} + u_{1-\alpha}\,\bar{R} / d_2(n) = \bar{x} + E_2(n)\bar{R} \; ;$$

$$LCL = \mu - u_{1-\alpha}\,\sigma = \bar{x} - u_{1-\alpha}\,\bar{R} / d_2(n) = \bar{x} - E_2(n)\bar{R}$$

.

Koeficient $E_2\,(n) = u_{1-\alpha} / d_2(n)$.

V ČSN ISO 8258 je uveden pro $\alpha = 0{,}00135$ koeficient $E_2(2) = 3/d_2(2) = 2{,}66$.

Poznámka:

V praxi se obvykle souběžně při regulaci pomocí individuálních hodnot používá pro sledování variability klouzavých rozpětí dvou sousedních hodnot.

Koeficient $d_2(n)$ plyne z rozdělení výběrových rozpětí, viz dále.

Výběrové průměry $\bar{x}$

Rozdělení výběrových průměrů je normální se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 / n (směrodatnou odchylkou $\sigma / \sqrt{n}$), tedy $N(\mu, \sigma^2/n)$.

- Pro známé hodnoty obou parametrů μ_0 a σ_0 je

$CL = \mu_0$; $UCL = \mu_0 + u_{1-\alpha}\, \sigma_0 / \sqrt{n} = \mu_0 + A(n)\, \sigma_0$;

$LCL = \mu_0 - u_{1-\alpha}\, \sigma_0 / \sqrt{n} = \mu_0 + A(n)\, \sigma_0$.

Koeficient: $\boxed{A(n) = u_{1-\alpha} / \sqrt{n}}$

- <u>Pro neznámé hodnoty obou parametrů</u> musí být tyto parametry odhadnuty pomocí průměru výběrových průměrů $\mu \equiv \bar{\bar{x}}$ a průměrné směrodatné odchylky podskupin $\sigma \equiv \bar{s}/C_4(n)$ resp. průměrného výběrového rozpětí $\sigma \equiv \bar{R}/d_2(n)$.

Koeficienty $C_4(n)$ a $d_2(n)$ plynou z rozdělení výběrových směrodatných odchylek a výběrových rozpětí.

Potom $CL = \mu = \bar{\bar{x}}$;

$$UCL = \mu + u_{1-\alpha}\sigma/\sqrt{n} = \bar{\bar{x}} + u_{1-\alpha}\bar{s}/C_4(n)\sqrt{n} = \bar{\bar{x}} + A_3(n)\bar{s} \quad ;$$

$$LCL = \mu - u_{1-\alpha}\sigma/\sqrt{n} = \bar{\bar{x}} - u_{1-\alpha}\bar{s}/C_4(n)\sqrt{n} = \bar{\bar{x}} - A_3(n)\bar{s} \quad .$$

Koeficient $\boxed{A_3(n) = u_{1-\alpha}/C_4(n)\sqrt{n}\ .}$

resp. $CL = \mu = \bar{\bar{x}}$;

$$UCL = \mu + u_{1-\alpha}\sigma/\sqrt{n} = \bar{\bar{x}} + u_{1-\alpha}\bar{R}/d_2(n)\sqrt{n} = \bar{\bar{x}} + A_2(n)\bar{R} \quad ;$$

$$LCL = \mu - u_{1-\alpha}\sigma/\sqrt{n} = \bar{\bar{x}} - u_{1-\alpha}\bar{R}/d_2(n)\sqrt{n} = \bar{\bar{x}} - A_2(n)\bar{R} \quad .$$

Koeficient $\boxed{A_2(n) = u_{1-\alpha}/d_2(n)\sqrt{n}\ .}$

Výběrové mediány Me

Rozdělení výběrových mediánů je možno pro praktické aplikace považovat za normální se střední hodnotou μ a rozptylem $\sigma^2 c_n^2 / n$ (směrodatnou odchylkou $\sigma\, c_n / \sqrt{n}$), tedy $N(\mu, \sigma^2 c_n^2 / n)$.

Koeficient c_n je v literatuře tabelován.

- Pro známé hodnoty obou parametrů μ_0 a σ_0 je

$$CL = \mu_0 \quad ; \quad UCL = \mu_0 + u_{1-\alpha}\, \sigma_0 c_n / \sqrt{n} = \mu_0 + A^*_4(n)\, \sigma_0 = \mu_0 + A_4(n)\, R_0 \, ;$$

$$LCL = \mu_0 - u_{1-\alpha}\, \sigma_0 c_n / \sqrt{n} = \mu_0 - A^*_4(n)\, \sigma_0 = \mu_0 - A_4(n)\, R_0 \, ;$$

Koeficient $\boxed{A^*_4(n) = u_{1-\alpha}\, c_n / \sqrt{n}}$ není v ČSN ISO 8258 uvažován. Uvádí se koeficient $A_4(n)$, který předpokládá nahrazení σ_0 daným výběrovým rozpětím R_0 a využití vztahu $\sigma_0 = R_0 / d_2(n)$. Potom

koeficient $\boxed{A_4(n) = u_{1-\alpha}\, c_n / d_2(n) \sqrt{n}}$

- Pro neznámé hodnoty obou parametrů musí být tyto parametry odhadnuty pomocí průměru výběrových mediánů $\mu \equiv \overline{Me}$ a průměrného výběrového rozpětí podskupin $\sigma \equiv \overline{R} / d_2(n)$.

Potom

$$CL = \overline{Me} \quad ; \quad UCL = \overline{Me} + u_{1-\alpha} \overline{R} c_n / d_2(n)\sqrt{n} = \overline{Me} + A_4(n)\overline{R}$$

$$LCL = \overline{Me} - u_{1-\alpha} \overline{R} c_n / d_2(n)\sqrt{n} = \overline{Me} - A_4(n)\overline{R}$$

Koeficient $\boxed{A_4(n) = \frac{u_{1-\alpha} c_n}{\sqrt{n}} / d_2(n) .}$

Pro ne příliš praktický případ se muže použít odhadu $\sigma \equiv \overline{s} / C_4(n)$ *, potom by bylo třeba nahradit koeficient $A_4(n)$ koeficientem* $A^*_4(n) = \frac{u_{1-\alpha} c_n}{\sqrt{n}} / C_4(n)$ *a vzorec pro výpočet mezí* $UCL, LCL = \overline{Me} \pm A^*_4(n)\overline{s}$.

Výběrové směrodatné odchylky s

Rozdělení výběrových směrodatných odchylek je prakticky normální se střední hodnotou E(s) a rozptylem D(s).

$$E(s) = \sigma \sqrt{\frac{2}{n-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \qquad D(s) = \sigma^2 \left\{ 1 - \frac{2}{n-1} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \right]^2 \right\}$$

Když označíme $E(s) = \sigma\, C_4(n)$ je $D(s) = \sigma^2 \left(1 - C_4^2(n)\right)$.

- <u>Pro známou hodnotu parametru σ_0 je</u>

$CL = \sigma_0\, C_4(n)$; $\quad UCL = \sigma_0 \left(C_4(n) + u_{1-\alpha}\sqrt{1 - C_4^2(n)}\right) = \sigma_0\, B_6(n)$;

$LCL = \sigma_0 \left(C_4(n) - u_{1-\alpha}\sqrt{1 - C_4^2(n)}\right) = \sigma_0\, B_5(n)$.

Koeficienty $\boxed{B_6(n) = C_4(n) + u_{1-\alpha}\sqrt{1 - C_4^2(n)}}$; $\boxed{B_5(n) = C_4(n) - u_{1-\alpha}\sqrt{1 - C_4^2(n)}}$.

V případě že je známá (průměrná) směrodatná odchylka podskupin s_0 kterou chceme využít, platí vztah $s_0 = \sigma_0\, C_4(n)$.

- <u>Pro neznámou hodnotu parametru</u> σ musí být tento parametr odhadnut $\sigma \equiv \bar{s}/C_4(n)$.

Potom $CL = \sigma C_4(n) = \bar{s}$;

$$UCL = \sigma C_4(n) + \sigma u_{1-\alpha}\sqrt{1-C_4^2(n)} = \bar{s}\left(1 + u_{1-\alpha}\sqrt{1-C_4^2(n)}\,/\,C_4(n)\right);$$

$$LCL = \sigma C_4(n) - \sigma u_{1-\alpha}\sqrt{1-C_4^2(n)} = \bar{s}\left(1 - u_{1-\alpha}\sqrt{1-C_4^2(n)}\,/\,C_4(n)\right).$$

Pro koeficienty

$$\boxed{B_4(n) = 1 + \frac{u_{1-\alpha}\sqrt{1-C_4^2(n)}}{C_4(n)}} \quad ;$$

$$\boxed{B_3(n) = 1 - \frac{u_{1-\alpha}\sqrt{1-C_4^2(n)}}{C_4(n)}} \quad ;$$

jsou $LCL = \bar{s}\,B_3(n)$ a $UCL = \bar{s}\,B_4(n)$.

Pokud koeficient $B_3(n) < 0$, klade se $B_3(n) = 0$.

Výběrové rozpětí R

Rozdělení výběrových rozpětí možno pro praktické účely považovat za normální se střední hodnotou E(R) a rozptylem D(R).

$$E(R) = \sigma\, d_2(n) \qquad\qquad D(R) = \sigma^2 (d_3(n))^2$$

Koeficienty $d_2(n)$ a $d_3(n)$ byly odvozeny a jsou tabelovány v literatuře.

- Pro známou hodnotu parametru σ_0 je

$$CL = \sigma_0\, d_2(n)\ ; \qquad UCL = \sigma_0\, (d_2(n) + u_{1-\alpha} d_3(n)) = \sigma_0\, D_2(n)\ ;$$

$$LCL = \sigma_0\, (d_2(n) - u_{1-\alpha} d_3(n)) = \sigma_0\, D_1(n)\ .$$

Koeficienty $\boxed{D_2(n) = d_2(n) + u_{1-\alpha}\, d_3(n)}$; $\boxed{D_1(n) = d_2(n) - u_{1-\alpha}\, d_3(n)}$.

V případě že je známé (průměrné) výběrové rozpětí podskupin R_0 které chceme využít, platí vztah $\sigma_0 = R_0 / d_2(n)$. Pro klouzavá rozpětí dvou sousedních hodnot je $d_2(2) = 1{,}128$.

- <u>Pro neznámou hodnotu parametru</u> σ musí být tento parametr odhadnut $\sigma \equiv \bar{R}/d_2(n)$.

Potom

$$CL = \sigma d_2(n) = \bar{R} \quad ;$$

$$UCL = \sigma d_2(n) + \sigma u_{1-\alpha} d_3(n) = \bar{R}\left(1 + u_{1-\alpha} d_3(n)/d_2(n)\right);$$

$$LCL = \sigma d_2(n) - \sigma u_{1-\alpha} d_3(n) = \bar{R}\left(1 - u_{1-\alpha} d_3(n)/d_2(n)\right).$$

Pro koeficienty

$$\boxed{D_4(n) = 1 + \frac{u_{1-\alpha} d_3(n)}{d_2(n)}} \quad ;$$

$$\boxed{D_3(n) = 1 - \frac{u_{1-\alpha} d_3(n)}{d_2(n)}} \quad .$$

jsou $LCL = \bar{R}\, D_3(n)$ a $UCL = \bar{R}\, D_4(n)$.

Pokud koeficient $D_3(n) < 0$, klade se $D_3(n) = 0$.

Vhodný způsob zjednodušení výpočtu koeficientu – např. pomocí tabulkového editoru MS Excel.

Ukázky tabulek součinitelů pro výpočet regulačních mezí a centrální přímky při zvoleném libovolném riziku „planého poplachu“ v případech že základní hodnoty jsou známy (A ; A_4 ; B_5 ; B_6 ; D_1 ; D_2) a v případech že základní hodnoty nejsou známy (A_2 ; A_3 ; A_4 ; B_3 ; B_4 ; D_3 ; D_4) a pomocných koeficientů (C_4 ; d_2 ; d_3) .

Poznámka: Výpočet proveden v souboru „Koeficienty.xls“,

Součinitele pro výpočet regulačních mezí a centrální přímky
α = 0,025 (v případě že základní hodnoty jsou stanoveny)

α = 0,02500

n	A	A4	B5	B6	D1	D2	C4	$d_2(n)$	$d_3(n)$	c_n
2	1,3859	1,2286	-0,3836	1,9794	-0,5429	2,7989	0,79788	1,1280	0,8525	1,000
3	1,1316	0,7754	-0,0217	1,7942	-0,0483	3,4341	0,88623	1,6929	0,8884	1,160
4	0,9800	0,5198	0,1593	1,6834	0,3345	3,7833	0,92132	2,0589	0,8798	1,092
5	0,8765	0,4514	0,2712	1,6088	0,6325	4,0197	0,93999	2,3261	0,8641	1,198
6	0,8002	0,3587	0,3488	1,5543	0,8722	4,1962	0,95153	2,5342	0,8480	1,136
7	0,7408	0,3326	0,4064	1,5124	1,0712	4,3372	0,95937	2,7042	0,8332	1,214
8	0,6930	0,2821	0,4513	1,4788	1,2406	4,4542	0,96503	2,8474	0,8198	1,159
9	0,6533	0,2690	0,4875	1,4511	1,3867	4,5533	0,96931	2,9700	0,8078	1,223
10	0,6198	0,2366	0,5175	1,4278	1,5156	4,6402	0,97266	3,0779	0,7971	1,175
11	0,5910	0,2289	0,5429	1,4078	1,6295	4,7157	0,97535	3,1726	0,7873	1,229
12	0,5658	0,2066	0,5647	1,3904	1,7326	4,7842	0,97756	3,2584	0,7785	1,190
13	0,5436	0,2009	0,5837	1,3751	1,8256	4,8456	0,97941	3,3356	0,7704	1,233
14	0,5238	0,1837	0,6004	1,3615	1,9117	4,9027	0,98097	3,4072	0,7630	1,195
15	0,5061	0,1803	0,6154	1,3493	1,9901	4,9543	0,98232	3,4722	0,7562	1,237
16	0,4900	0,1667	0,6287	1,3382	2,0625	5,0021	0,98348	3,5323	0,7499	1,202
17	0,4754	0,1640	0,6408	1,3282	2,1297	5,0465	0,98451	3,5881	0,7441	1,238
18	0,4620	0,1532	0,6518	1,3190	2,1927	5,0879	0,98541	3,6403	0,7386	1,207
19	0,4496	0,1510	0,6619	1,3105	2,2511	5,1263	0,98621	3,6887	0,7335	1,239
20	0,4383	0,1422	0,6711	1,3027	2,3073	5,1637	0,98693	3,7355	0,7287	1,212
21	0,4277		0,6797	1,2955	2,3585	5,1973	0,98758	3,7779	0,7242	
22	0,4179		0,6876	1,2888	2,4087	5,2307	0,98817	3,8197	0,7199	
23	0,4087		0,6950	1,2825	2,4549	5,2611	0,98870	3,8580	0,7159	
24	0,4001		0,7018	1,2766	2,4999	5,2913	0,98919	3,8956	0,7121	
25	0,3920		0,7083	1,2710	2,5424	5,3192	0,98964	3,9308	0,7084	
30	0,3578		0,7352	1,2476	2,7285	5,4435	0,99142	4,0860	0,6926	
35	0,3313		0,7559	1,2295	2,8804	5,5456	0,99268	4,2130	0,6799	
40	0,3099		0,7724	1,2148	3,0104	5,6336	0,99361	4,3220	0,6692	
45	0,2922		0,7860	1,2027	3,1212	5,7088	0,99433	4,4150	0,6601	
50	0,2772		0,7974	1,1924	3,2199	5,7761	0,99491	4,4980	0,6521	

Součinitele pro výpočet regulačních mezí a centrální přímky
α = 0,025 (v případě že základní hodnoty nejsou stanoveny)

α = 0,02500

n	A2	A3	A4	B5	B6	D1	D2	C4	$d_2(n)$	$d_3(n)$	c_n
2	1,2286	1,7370	1,2286		1,9794	-0,5429	2,7989	0,79788	1,1280	0,8525	1,000
3	0,6684	1,2769	0,7754	-0,0217	1,7942	-0,0483	3,4341	0,88623	1,6929	0,8884	1,160
4	0,4760	1,0637	0,5198	0,1593	1,6834	0,3345	3,7833	0,92132	2,0589	0,8798	1,092
5	0,3768	0,9325	0,4514	0,2712	1,6088	0,6325	4,0197	0,93999	2,3261	0,8641	1,198
6	0,3157	0,8409	0,3587	0,3488	1,5543	0,8722	4,1962	0,95153	2,5342	0,8480	1,136
7	0,2739	0,7722	0,3326	0,4064	1,5124	1,0712	4,3372	0,95937	2,7042	0,8332	1,214
8	0,2434	0,7181	0,2821	0,4513	1,4788	1,2406	4,4542	0,96503	2,8474	0,8198	1,159
9	0,2200	0,6740	0,2690	0,4875	1,4511	1,3867	4,5533	0,96931	2,9700	0,8078	1,223
10	0,2014	0,6372	0,2366	0,5175	1,4278	1,5156	4,6402	0,97266	3,0779	0,7971	1,175
11	0,1863	0,6059	0,2289	0,5429	1,4078	1,6295	4,7157	0,97535	3,1726	0,7873	1,229
12	0,1736	0,5788	0,2066	0,5647	1,3904	1,7326	4,7842	0,97756	3,2584	0,7785	1,190
13	0,1630	0,5550	0,2009	0,5837	1,3751	1,8256	4,8456	0,97941	3,3356	0,7704	1,233
14	0,1537	0,5340	0,1837	0,6004	1,3615	1,9117	4,9027	0,98097	3,4072	0,7630	1,195
15	0,1457	0,5152	0,1803	0,6154	1,3493	1,9901	4,9543	0,98232	3,4722	0,7562	1,237
16	0,1387	0,4982	0,1667	0,6287	1,3382	2,0625	5,0021	0,98348	3,5323	0,7499	1,202
17	0,1325	0,4828	0,1640	0,6408	1,3282	2,1297	5,0465	0,98451	3,5881	0,7441	1,238
18	0,1269	0,4688	0,1532	0,6518	1,3190	2,1927	5,0879	0,98541	3,6403	0,7386	1,207
19	0,1219	0,4559	0,1510	0,6619	1,3105	2,2511	5,1263	0,98621	3,6887	0,7335	1,239
20	0,1173	0,4441	0,1422	0,6711	1,3027	2,3073	5,1637	0,98693	3,7355	0,7287	1,212
21	0,1132	0,4331		0,6797	1,2955	2,3585	5,1973	0,98758	3,7779	0,7242	
22	0,1094	0,4229		0,6876	1,2888	2,4087	5,2307	0,98817	3,8197	0,7199	
23	0,1059	0,4133		0,6950	1,2825	2,4549	5,2611	0,98870	3,8580	0,7159	
24	0,1027	0,4044		0,7018	1,2766	2,4999	5,2913	0,98919	3,8956	0,7121	
25	0,0997	0,3961		0,7083	1,2710	2,5424	5,3192	0,98964	3,9308	0,7084	
30	0,0876	0,3609		0,7352	1,2476	2,7285	5,4435	0,99142	4,0860	0,6926	
35	0,0786	0,3337		0,7559	1,2295	2,8804	5,5456	0,99268	4,2130	0,6799	
40	0,0717	0,3119		0,7724	1,2148	3,0104	5,6336	0,99361	4,3220	0,6692	
45	0,0662	0,2938		0,7860	1,2027	3,1212	5,7088	0,99433	4,4150	0,6601	
50	0,0616	0,2786		0,7974	1,1924	3,2199	5,7761	0,99491	4,4980	0,6521	

REGULAČNÍ DIAGRAMY SROVNÁVÁNÍM

DIAGRAMY PRO DISKRÉTNÍ ZNAKY

Regulační diagramy srovnáváním

V ČSN ISO 8258 se uvažují pro regulaci srovnáváním následující statistiky:

p - podíl neshodných jednotek v podskupině rozsahu n;

statistika má binomické rozdělení se střední hodnotou $\bar{p}$ ***a rozptylem*** $\bar{p}(1-\bar{p})/n$ ***;***

np - počet neshodných jednotek v podskupině rozsahu n;

statistika má binomické rozdělení se střední hodnotou $n\bar{p}$ ***a rozptylem*** $n\bar{p}(1-\bar{p})$ ***;***

c - počet neshod v podskupině rozsahu n;

statistika má Poissonovo rozdělení se střední hodnotou $\bar{c}$ **a rozptylem** $\bar{c}$ **;**

u - počet neshod na jednotku v podskupině rozsahu n;

statistika má Poissonovo rozdělení se střední hodnotou $\bar{u}$ ***a rozptylem*** $\bar{u}/n$ ***.***

Přehled vzorců regulačních mezí regulačních diagramů srovnáváním.

Statistika	CP	UCL a LCL
p	$\bar{p}$	$\bar{p} \pm u_{1-\alpha}\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/n}$
np	$n\bar{p}$	$n\bar{p} \pm u_{1-\alpha}\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$
c	$\bar{c}$	$\bar{c} \pm u_{1-\alpha}\sqrt{\bar{c}}$
u	$\bar{u}$	$\bar{u} \pm u_{1-\alpha}\sqrt{\bar{u}/n}$

V případě, že „základní hodnoty jsou stanoveny, nahradí se ve výrazech průměry $\bar{p}$; $n\bar{p}$; $\bar{c}$; $\bar{u}$ stanovenými hodnotami p_0 ; np_0 ; c_0 ; u_0 .

Výstražné regulační meze

Praxe často požaduje vedle regulačních mezí (chápaných jako „zásahové“ ještě užší meze, které by v předstihu signalizovaly možnost vzniku zvláštní příčiny variability. Pravděpodobnost náhodného překročení těchto „výstražných“ mezí se obvykle volí větší, mezi 0,01 až 0,05. V literatuře se někdy uvažují ve vzdálenosti ± 2σ (příslušné výběrové charakteristiky) od centrální přímky.

Pravděpodobnost náhodného překročení, takto stanovených „výstražných“ mezí, je 0,02275. Pravděpodobnost, že se náhodně vyskytnou dva výběrové body za sebou nad horní, nebo pod dolní „výstražnou“ mezí je již velmi malá, rovná 0,00052, což je pod úrovní běžného rizika 0,00135.

Navržený postup umožňuje také stanovit „výstražné“ meze pro libovolnou pravděpodobnost α jejich náhodného překročení a vypočítat pravděpodobnost p(m;k;α) že budou překročeny m-krát během k podskupin. Tato pravděpodobnost je rovna

$$p(m;k;\alpha) = \binom{k}{m} \alpha^{m} (1-\alpha)^{k-m} .$$

1) Ukázka výpočtu výstražných mezí v Excelu - soubor „Koeficienty.xls“

Pravděpodobnost, že se v k podskupinách vyskytne náhodně m výběrových bodů mimo jednu nebo druhou regulační mez

(Výsledná pravděpodobnost je na 8 desetinných míst, tj. na setiny ppm.)

α = 0,02275

podskupiny	k =	1	2	3	4	5	10	15	20	25	30	50
mimo meze	m =											
	1	0,02275000	0,04446488	0,06517995	0,08492947	0,10374666	0,18494071	0,24725903	0,29384567	0,32738419	0,35016066	0,36832371
	2		0,00051756	0,00151736	0,00296569	0,00483036	0,01937406	0,04029266	0,06498582	0,09145652	0,11819826	0,21007360
	3			0,00001177	0,00004603	0,00011245	0,00120272	0,00406466	0,00907707	0,01632289	0,02568169	0,07824691
	4				0,00000027	0,00000131	0,00004900	0,00028387	0,00089807	0,00208995	0,00403555	0,02140330
	5					0,00000001	0,00000137	0,00001454	0,00006690	0,00020434	0,00048852	0,00458400
	6						0,00000003	0,00000056	0,00000389	0,00001586	0,00004739	0,00080035
	7						0,00000000	0,00000002	0,00000018	0,00000100	0,00000378	0,00011711
	8						0,00000000	0,00000000	0,00000001	0,00000005	0,00000025	0,00001465
	9						0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000001	0,00000159
	10						0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000015
	11							0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000001
	12							0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000
	13							0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000
	14							0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000
	15							0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000

Příklad: Pro „výstražné“ meze, umístěné 2σ od CL, je pravděpodobnost, že padne jeden výběrový bod mimo jednu nebo druhou mez rovna 0,02275; pravděpodobnost, že tam padnou dva za sebou je rovna 0,00051756; pravděpodobnost, že během 25 podskupin padne pět výběrových bodů mimo jednu nebo druhou mez je rovna 0,00020434.

Modifikace:

Modifikovaný postup pracuje s pravděpodobností, že během kontroly k podskupin dojde právě k m překročení výstražných mezí, ale zásahové (regulační) meze nebudou překročeny.

Označíme-li α_Z pravděpodobnost náhodného překročení zásahové meze a α_V pravděpodobnost náhodného překročení příslušné výstražné meze, potom uvažovaná pravděpodobnost je rovna

$$p[m; k; (1-\alpha_Z) - (1-\alpha_W)] =$$

$$\binom{k}{m} \left[(1-\alpha_Z) - (1-\alpha_V)\right]^m \left(1 - \left[(1-\alpha_Z) - (1-\alpha_V)\right]\right)^{k-m} .$$

2) Ukázka výpočtu v Excelu - soubor „Koeficienty.xls“

Pravděpodobnost, že se v k podskupinách vyskytne náhodně m výběrových bodů mimo výstražnou mez, ale nepřekročí zásahovou mez

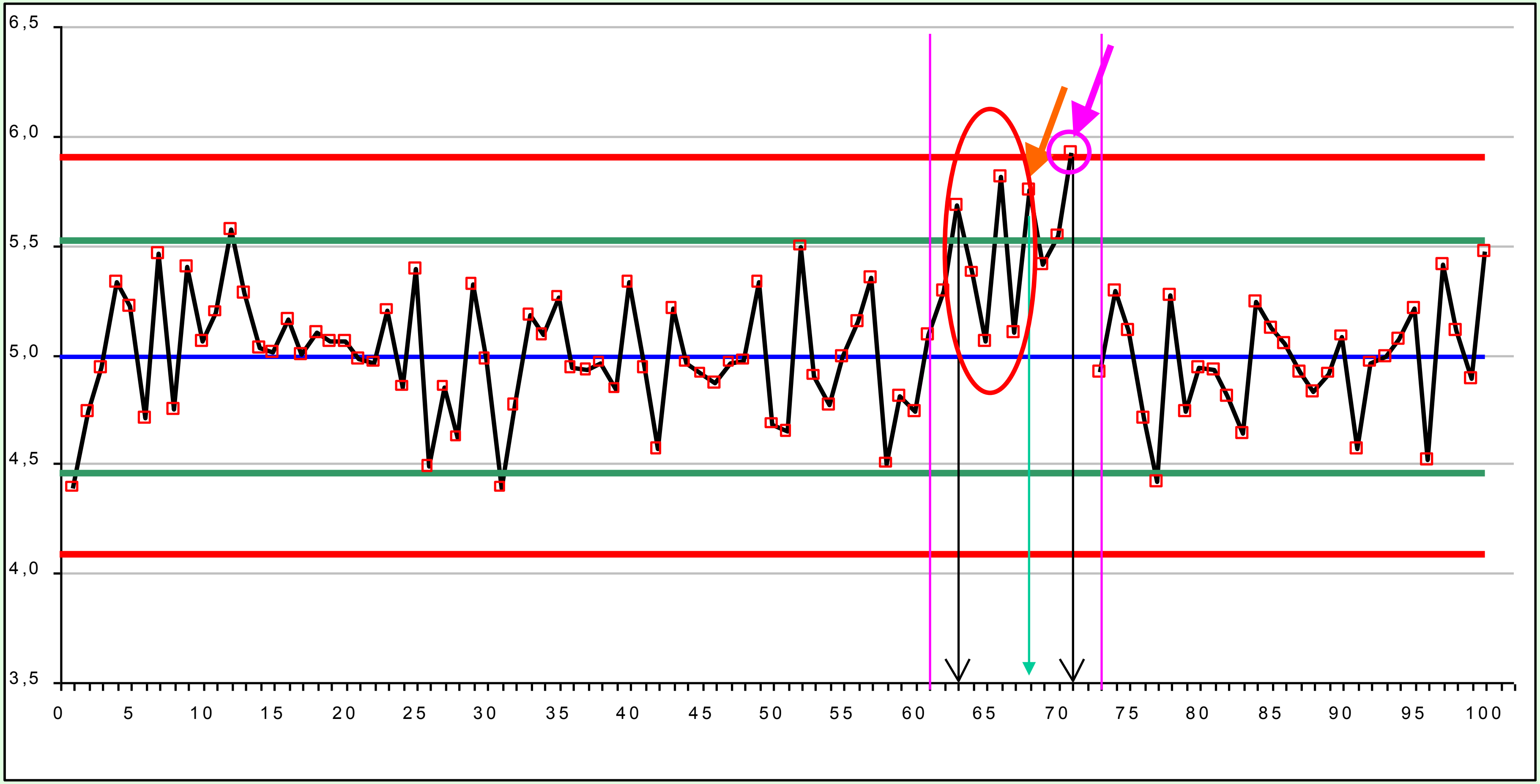
(Výsledná pravděpodobnost je na 8 desetinných míst, tj. při vynásobením 10^6 na setiny ppm.)

α_V = 0,02275 α_Z = 0,00135

podskupiny k =	1	2	3	4	5	10	15	20	25	30	50
mimo meze m =											
1	0,02140000	0,04188408	0,06148164	0,08022125	0,09813064	0,17614109	0,23712535	0,28375452	0,31833094	0,34283579	0,37071413
2		0,00045796	0,00134448	0,00263141	0,00429184	0,01733332	0,03629816	0,05894880	0,08353504	0,10870830	0,19861580
3			0,00000980	0,00003836	0,00009385	0,00101079	0,00343966	0,00773454	0,01400502	0,02218748	0,06949320
4				0,00000021	0,00000103	0,00003868	0,00022566	0,00071884	0,00168444	0,00327507	0,01785619
5					0,00000000	0,00000102	0,00001086	0,00005030	0,00015471	0,00037242	0,00359240
6						0,00000002	0,00000040	0,00000275	0,00001128	0,00003393	0,00058919
7						0,00000000	0,00000001	0,00000012	0,00000067	0,00000254	0,00008099
8						0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000003	0,00000016	0,00000952
9						0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000001	0,00000097
10						0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000009
11							0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000001
12							0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000
13							0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000
14							0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000
15							0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000

Příklad: Pro „výstražné“ meze, umístěné 2σ od CL, a pro „zásahové“ meze umístěné 3σ od CL je pravděpodobnost, že padne jeden výběrový bod mimo jednu nebo druhou „výstražnou“ mez, ale nikoliv mimo „zásahovou“ mez, rovna 0,02140; pravděpodobnost, že tam padnou dva za sebou je rovna 0,000458; pravděpodobnost, že během 25 podskupin tam padne 5 výběrových bodů je rovna 0,000155.

Regulační diagram výběrových průměrů s **regulačními** (zásahovými) mezemi a s **výstražnými** mezemi. Po šedesáté podskupině došlo ke změně střední hodnoty procesu z 5,0 na 5,35. Při kontrole 68 podskupiny bylo porušeno kriterium ve vztahu k výstražným mezím (tři body z šesti mezi výstražnou a zásahovou mezí odpovídá riziku 0,001). Při kontrole 71 podskupiny došlo k překročení regulační meze. Proces byl poté seřízen.



Závěr:

Uvedené výsledky umožňují rozšířit uplatnění Shewhartových regulačních diagramů pro libovolně zvolená rizika planých poplachů i výpočet výstražných mezí, které umožňují zvýšit účinnost regulačních diagramů při detekci zvláštních příčin variability.

Umožňují vyhodnotit rizika plynoucí z chybějícího signálu, vyhodnotit operační charakteristiku regulačního diagramu, případně zvážit použití netradičních, nadstavbových regulačních diagramů.

Obecný výpočet koeficientů Shewhartových regulačních mezí najde své využití i v případech, kdy je vhodné aplikovat modifikované, rozšířené, regulační meze.

Nutno podotknout, že statistické regulační diagramy Shewhartova typu jsou vhodné při detekci velkých posunů střední hodnoty, řádově několika směrodatných odchylek. Pro detekci menších posunů střední hodnoty je třeba aplikovat regulační diagramy doplněné výstražnými mezemi, případně regulační diagramy typu kumulovaných součtů (CUSUM), nebo diagramy exponenciálně vážených klouzavých průměrů (EWMA).

DĚKUJI ZA POZORNOST

J. TONAR