

Simultánní hodnocení způsobilosti více znaků kvality

Jiří Michálek
CQR při ÚTIA AVČR

Definice vícerozměrných ukazatelů způsobilosti

$$MC_p, MC_{pk}$$

Jednorozměrná verze

$$C_p = (USL - LSL)/6\sigma$$

pro normálně rozdělený znak kvality

$$C_p = (USL - LSL)/(q_{1-\alpha} - q_\alpha)$$

pro nenormálně rozdělený znak kvality

$\alpha = 0,135\%$ a q jsou příslušné kvantily

Jednorozměrná verze

$$C_{pk} = \min(USL - \mu, \mu - LSL) / 3\sigma$$

pro normálně rozdělený znak kvality

$$C_{pk} = \min(C_{pkU}, C_{pkL}),$$

kde $C_{pkU} = (USL - Med) / (q_{1-\alpha} - Med)$

a $C_{pkL} = (Med - LSL) / (Med - q_{\alpha})$

pro nenormálně rozdělený znak
kvality

Princip definice ukazatelů způsobilosti

C_p = toleranční rozpětí / (délka
pokryvného intervalu s pstí 99,73%)

v případě C_{pk} je

C_{pkU} = (horní část tolerančního rozpětí) /
(horní část pokryvného intervalu s pstí
49,865%)

C_{pkL} = (dolní část tolerančního rozpětí) /
(dolní část pokryvného intervalu s pstí
49,865%)

Různé přístupy k definování vícerozměrných ukazatelů způsobilosti

První snahy definovat ukazatele způsobilosti pro sledování několika měřitelných znaků kvality se objevily již na počátku 90-tých let

Ukázalo se, že jejich problematika je daleko více složitější nežli u jednorozměrného případu, a to jak v jejich definování, tak i v jejich výpočtu a vlastnostech jejich odhadů

Jejich problematika není zdaleka doposud vyřešena a je otázkou, jaký přístup bude zvolen pro jejich zavedení v odpovídajících normách

Obecné schéma

Sledujeme produkt, na němž je současně měřeno několik znaků kvality X_1, X_2, \dots, X_n .

Každý znak má předepsány své mezní hodnoty USL_i, LSL_i .

Objem tolerančního kvádru

$$Otk = \prod (USL_i - LSL_i)$$

1. Primitivní přístup

Pro každý znak kvality spočítáme hodnoty ukazatelů C_p a C_{pk}

$$\text{Pak } MC_p = \min(C_p^{(1)}, C_p^{(2)}, \dots, C_p^{(n)})$$

$$\begin{aligned} &\text{Podobně } MC_{pk} = \\ &= \min(C_{pk}^{(1)}, C_{pk}^{(2)}, \dots, C_{pk}^{(n)}) \end{aligned}$$

Výhody: snadný výpočet

Nevýhody: neznámý vztah k počtu neshodných kusů a statistické vlastnosti odhadů

2. Přístup založený na počtu neshodných kusů

Pro normální rozdělení platí, že očekávaný podíl p neshodných kusů je roven $p = 2\Phi(-3C_p)$, kde Φ je $N(0,1)$.

Tento vztah byl použit i pro vícerozměrný případ

$$MC_p = -\Phi^{-1}(p/2)/3,$$

kde p je prst výskytu neshodného kusu přes všechny sledované znaky kvality

2. Přístup založený na počtu neshodných kusů (pokračování)

Výhody: snadný výpočet na základě odhadu prsti p pomocí relativního zastoupení nalezených neshodných kusů

Možnost aproximace hustoty pro odhad ukazatele na základě CLT a její použití pro odhady pokryvných a konfidenčních intervalů

Nevýhody: nepoužitelné v případě velmi malého počtu neshodných kusů, např. při velice kvalitní výrobě

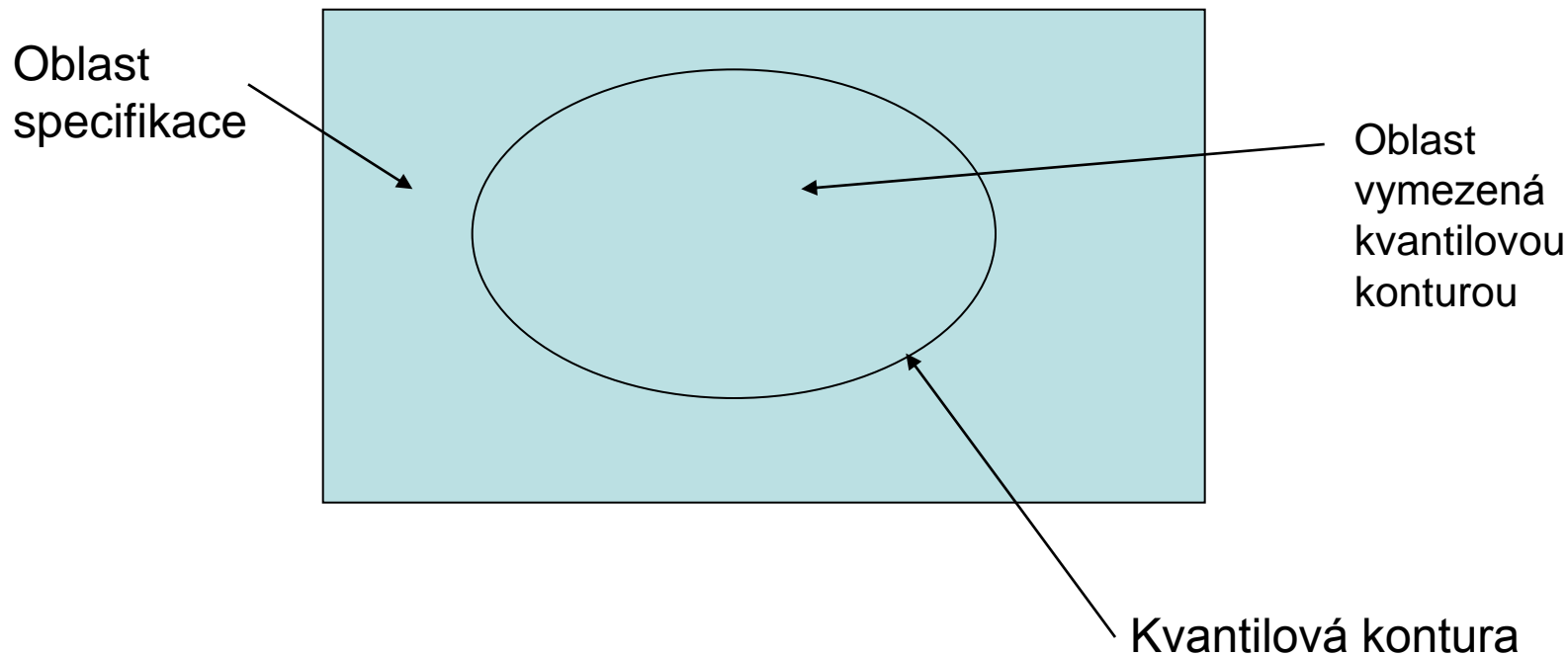
3. Teoreticky správný přístup

MC_p = podíl Otk vůči objemu oblasti,
která je ohraničena kvantilovou konturou
na úrovni 99,73%

Nutno znát typ rozdělení, u
vícerozměrného normálního rozdělení
kvantilová kontura vytváří povrch
vícerozměrného elipsoidu

3. Teoreticky správný přístup (pokrač.)

2-rozměrný případ



3. Teoreticky správný přístup (pokrač.) n-rozměrný případ

Když se jedná o n-rozměrné normální rozdělení $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, pak elipsoid je definován nerovností

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \leq \chi^2_{n, 0,9973},$$

kde napravo je příslušný kvantil χ^2 -rozdělení

3. Teoreticky správný přístup (pokrač.) n-rozměrný případ

$$MC_p = Otk / \det \Sigma^{1/2} (\pi \chi^2_{n, 0,9973})^{n/2} (\Gamma(1+n/2))^{-1}$$

Odhad MC_p se vypočte tak, že kovarianční matice Σ se nahradí výběrovou kovarianční maticí

Výhody: poměrně snadný výpočet, zvláště u vzájemně nezávislých znaků kvality, kdy determinant kovarianční matice je součin odpovídajících rozptylů

Nevýhody: pro spolehlivost odhadu kovarianční matice je zapotřebí relativně dosti dat (stovky), komplikované výpočty statistik od odhadu tohoto ukazatele

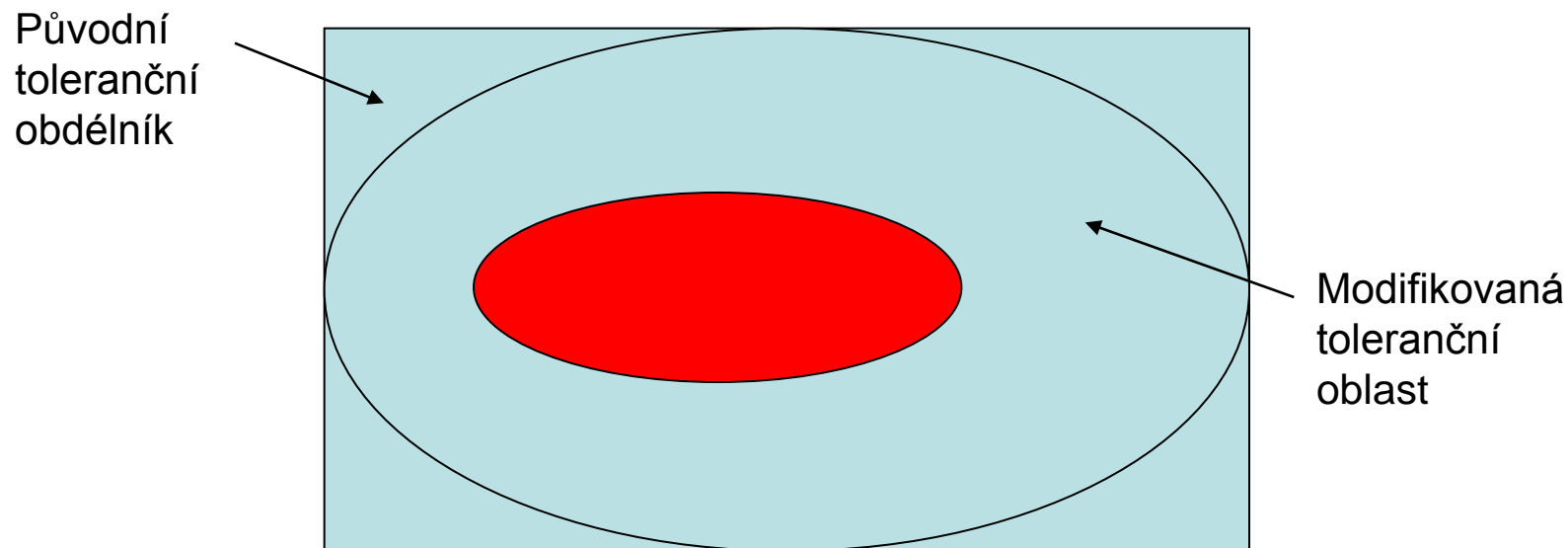
4. Modifikovaná toleranční oblast

Namísto toleranční oblasti ve tvaru n -rozměrného kvádru je toleranční oblast vymezena největším n -rozměrným elipsoidem, který se do tolerančního kvádru vejde

Důvod: Zpřísní se tím vlastně požadavek na kvalitu procesu, snahou je potlačit vliv hodnot, které jsou blízko rohů n -rozměrného kvádru

4. Modifikovaná toleranční oblast (pokrač.)

Ve 2-rozměrném případě situace vypadá následovně:



Červená elipsa pokrývá 99,73% hodnot znaků kvality

4. Modifikovaná toleranční oblast (pokrač.)

U 2-rozměrného případu je plocha modifikované toleranční oblasti rovna

$$MOtk = \pi ab,$$

$$\text{kde } a = (USL_1 - LSL_1)/2$$

$$b = (USL_2 - LSL_2)/2$$

Odhad ukazatele C_p s modifikovanou toleranční oblastí se vypočte podobně jako předchozí odhad na základě výběrové kovarianční matice

4. Modifikovaná toleranční oblast (pokrač.)

Příklad s 2-rozměrnými daty

Cílové hodnoty pro šířku a tloušťku jsou $4,5\mu\text{m}$ a $0,75\mu\text{m}$. Data jsou individuální ho charakteru po 50, jejich výběrové průměry jsou 4,3 a 0,8. Výběrová kovarianční matice je dána odhady rozptylů 0,02 a 0,006, výběrová kovariance je 0,009. Z toho snadno determinant matice je $3,9 \times 10^{-5}$. Plocha modifikované toleranční oblasti je pak $\pi \times 0,25 \times 0,5$.

Plocha pokryvné elipsy je pak $3,9 \times 10^{-5} \times \pi \times 11,928 / \Gamma(2)$, kde 11,829 je 99,73% kvantil χ^2 -rozdělení o 2 stupních volnosti. Z toho již snadno odhadneme ukazatel MC_p . Jeho odhad je pak 1,6921. Tato hodnota dává poměrně velkou naději, že proces je v pořádku.

Spočítejme ale další variantu ukazatele způsobilosti C_{pm} , kde kovarianční matice Σ_T není vztažena k parametru μ , ale k cílovým hodnotám $\mathbf{T} = (4,5; 0,75)$. Vztah mezi oběma kovariančními maticemi je jednoduchý:

$$\Sigma_T = \Sigma + (\mu - \mathbf{T})(\mu - \mathbf{T})^T.$$

Tento ukazatel vyjadřuje i umístění dat vůči požadovaným cílovým hodnotám. Stejným postupem jako výše vypočteme odhad tohoto ukazatele a získáme hodnotu 0,464, což evidentně znamená, že data jsou hodně vzdálena od cílové hodnoty.

5. Dvourozměrný ukazatel způsobilosti

Pro každý znak kvality je vypočten příslušný odhad ukazatele způsobilosti a odhad dvourozměrného ukazatele způsobilosti je uvažován jako dvourozměrná náhodná veličina složená z oněch marginálních odhadů. Zásadním problémem je pak odvození dvourozměrné distribuce, třeba ve tvaru hustoty rozdělení prsti. V případě, že výchozí znaky jakosti lze považovat za stochasticky nezávislé, dvourozměrná hustota je pak jednoduše součinem marginálních hustot. Tento přístup umožňuje pak např. testovat hypotézu $H_0: \max (C_p^{(1)}, C_p^{(2)}) \leq c_0$ vs. $H_1: \min (C_p^{(1)}, C_p^{(2)}) > c_0$.

Numerický příklad pro 2 dimenze

Data jsou vypůjčena z připravované normy ISO
NWI 22514-5: *Capability and performance –
Part 5: Process capability statistics for
characteristics following a multivariate normal
distribution*

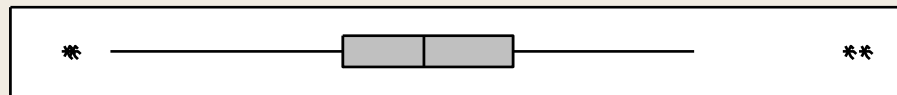
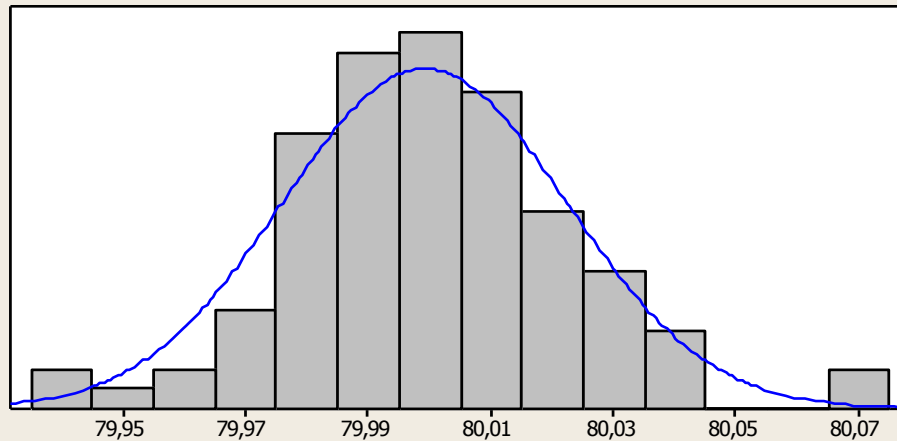
Jedná se o dvourozměrná data (100 párů),
která byla získána při měření přesnosti pozice
pro střed kruhového otvoru v kovové desce.

$$\begin{array}{ll} USL_x = 80,250 & LSL_x = 79,750 \\ USL_y = -116,250 & LSL_y = -116,750 \end{array}$$

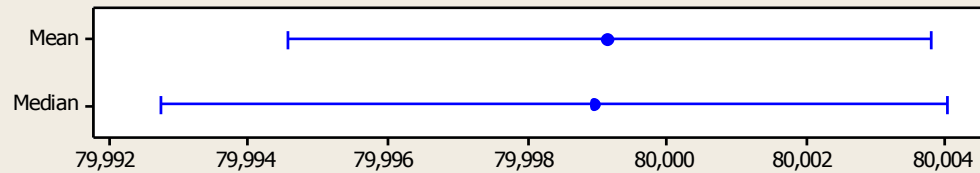
Tabulky a grafy byly zpracovány pomocí
softwaru Minitab 15

Základní informace o veličině X

Summary for X



95% Confidence Intervals



Anderson-Darling Normality Test

A-Squared	0,41
P-Value	0,339

Mean	79,999
StDev	0,023
Variance	0,001
Skewness	0,269799
Kurtosis	0,981262
N	100

Minimum	79,941
1st Quartile	79,986
Median	79,999
3rd Quartile	80,014
Maximum	80,071

95% Confidence Interval for Mean

Lower Bound	79,995
Upper Bound	80,004

95% Confidence Interval for Median

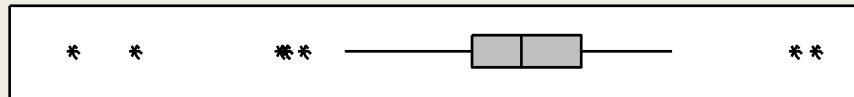
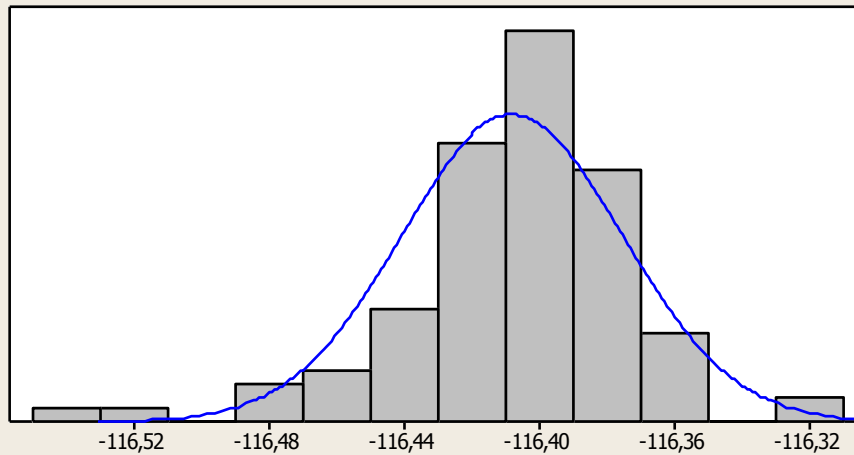
Lower Bound	79,993
Upper Bound	80,004

95% Confidence Interval for StDev

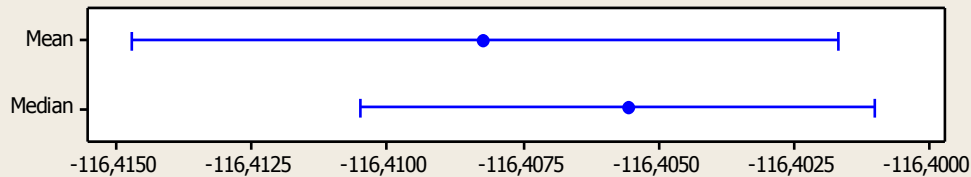
Lower Bound	0,020
Upper Bound	0,027

Základní informace o veličině Y

Summary for Y



95% Confidence Intervals



Anderson-Darling Normality Test

A-Squared 1,75

P-Value < 0,005

Mean -116,41

StDev 0,03

Variance 0,00

Skewness -0,93129

Kurtosis 3,23151

N 100

Minimum -116,54

1st Quartile -116,42

Median -116,41

3rd Quartile -116,39

Maximum -116,32

95% Confidence Interval for Mean

-116,41 -116,40

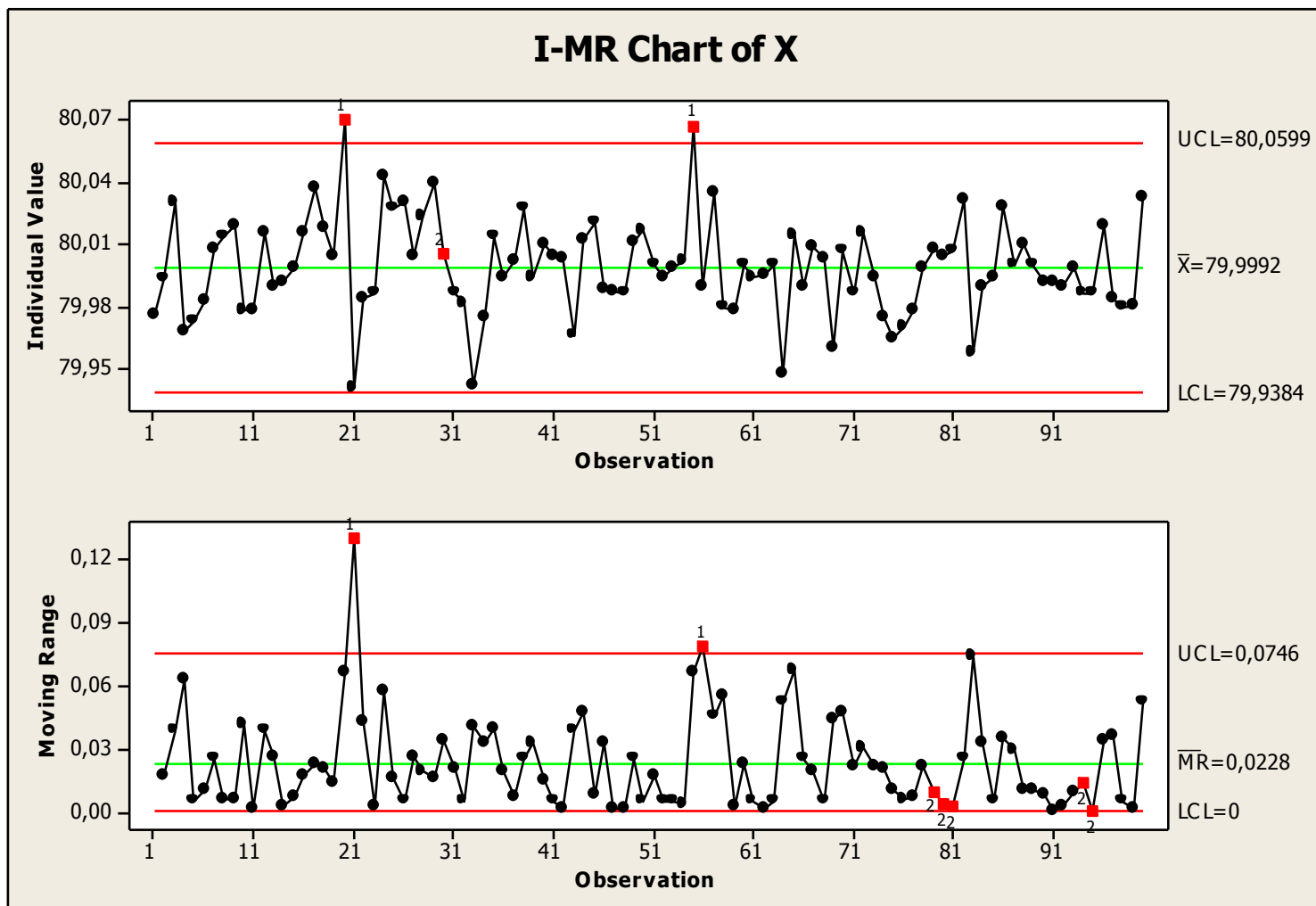
95% Confidence Interval for Median

-116,41 -116,40

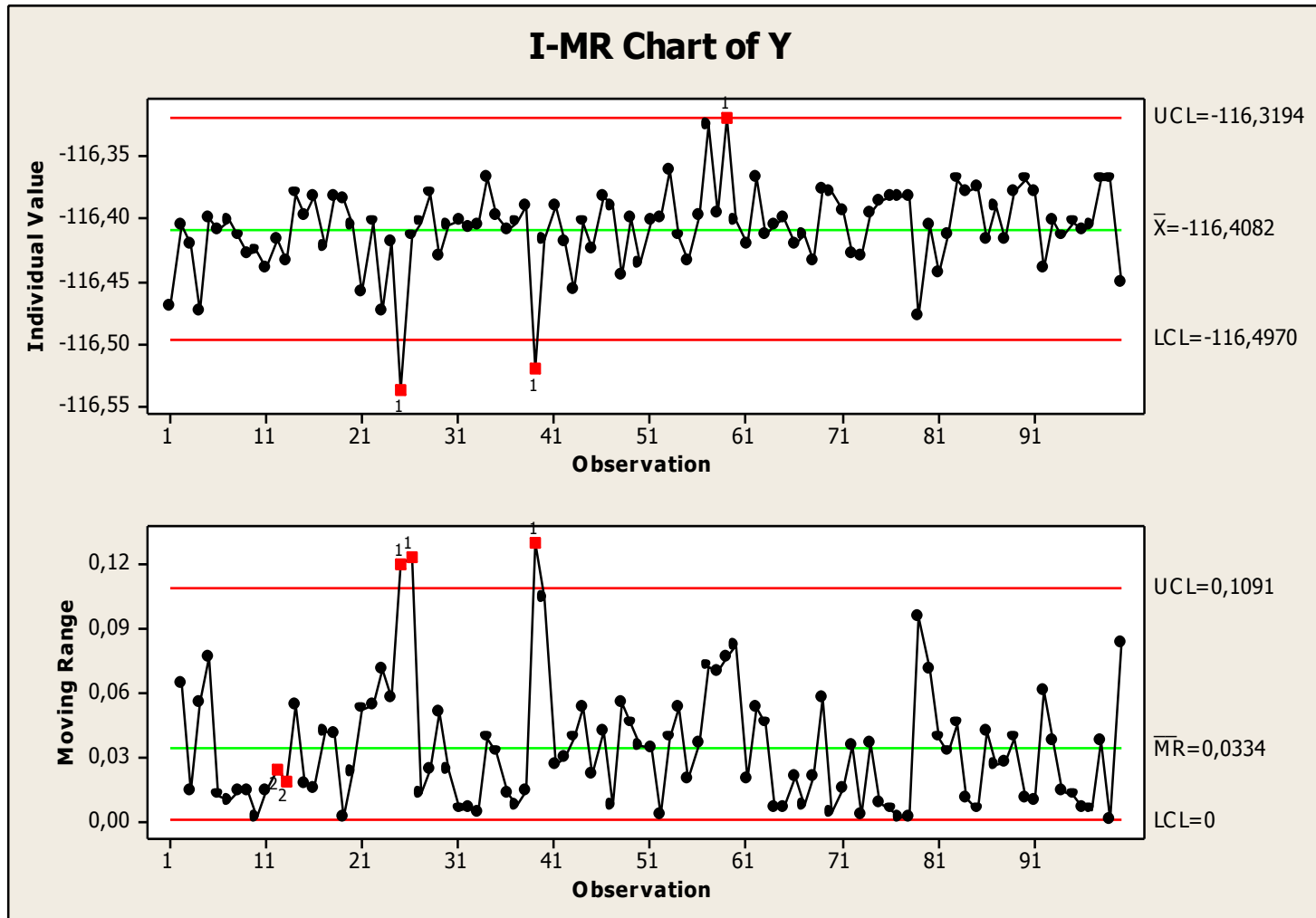
95% Confidence Interval for StDev

0,03 0,04

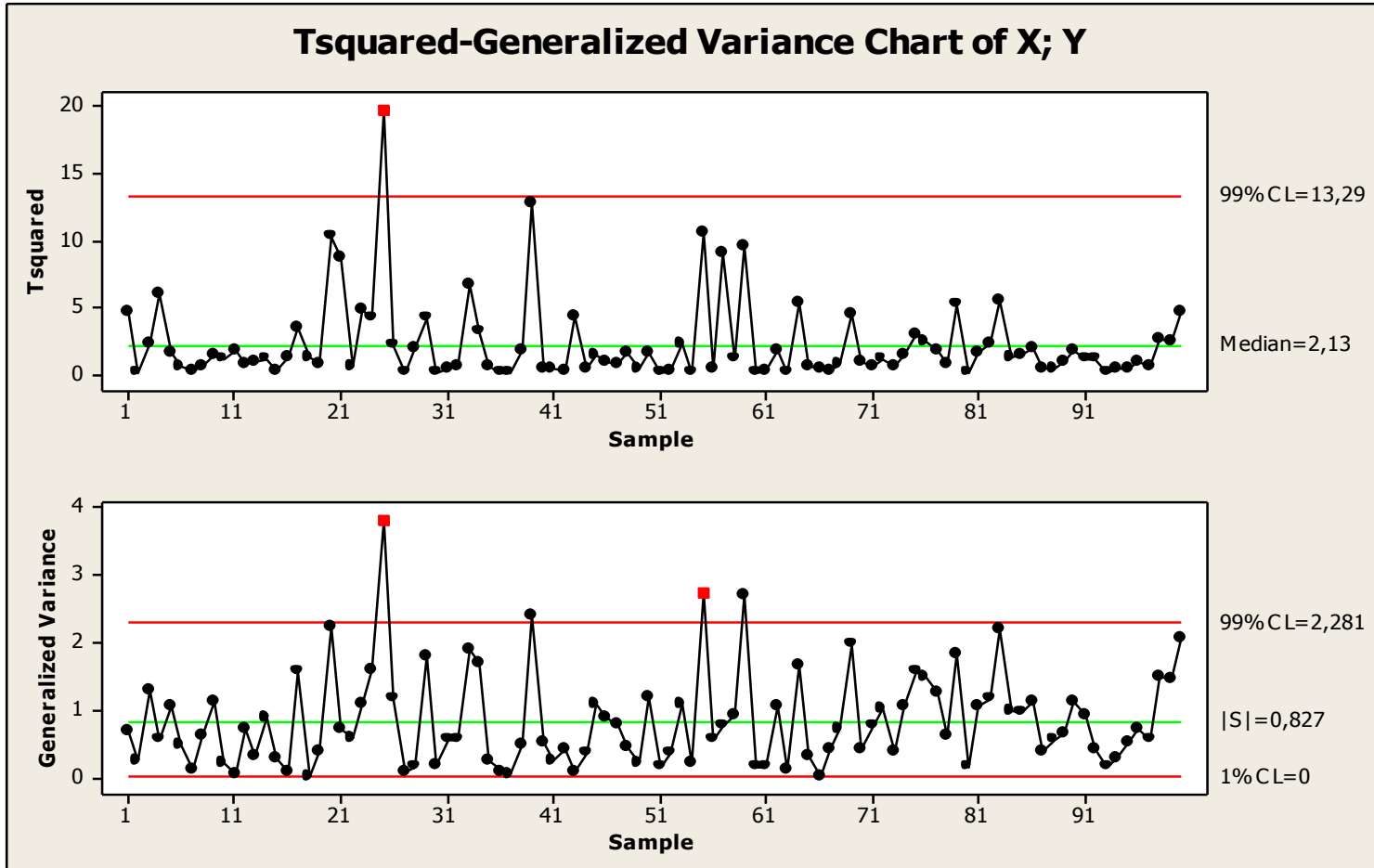
Regulační diagram pro veličinu X



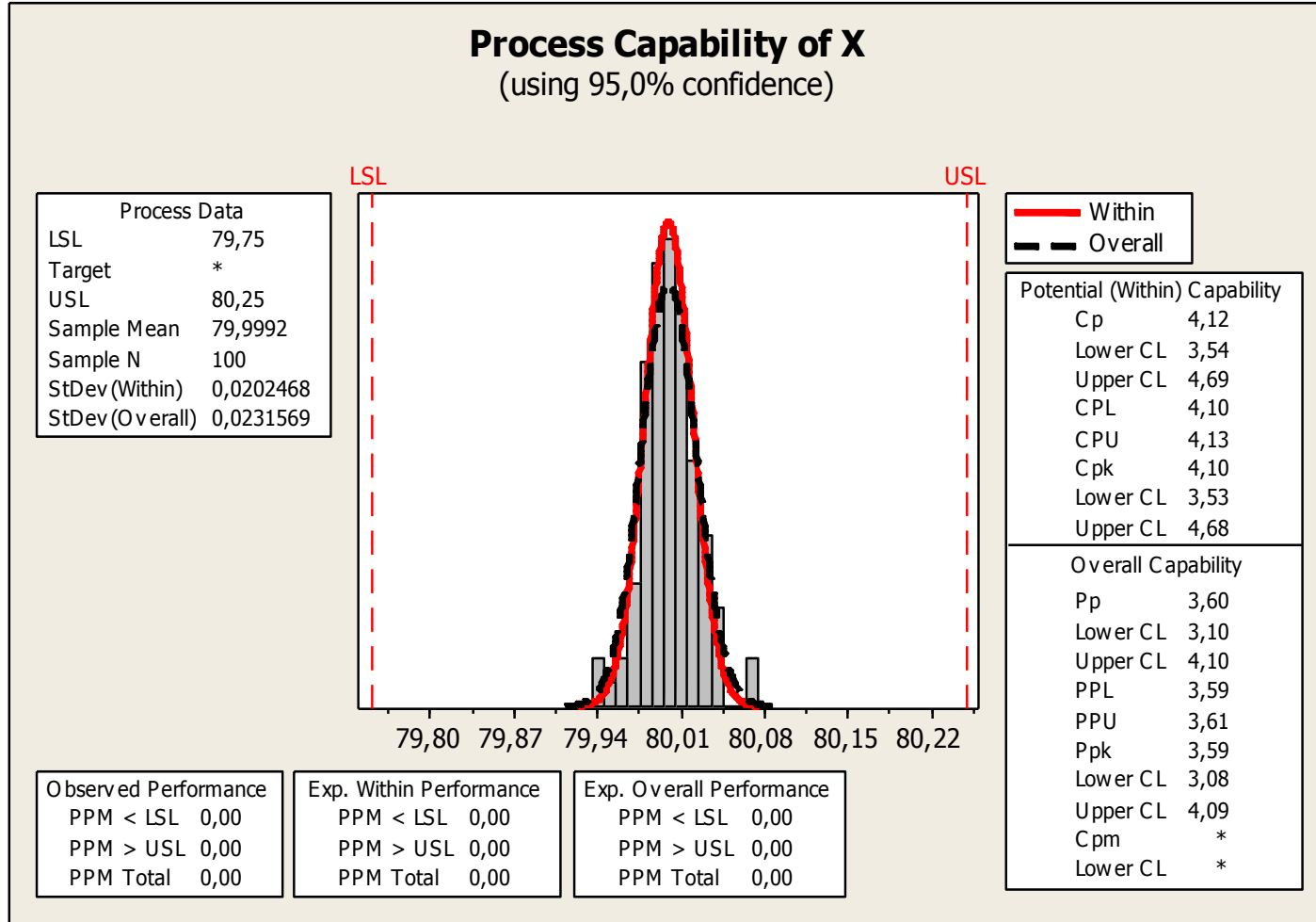
Regulační diagram pro veličinu Y



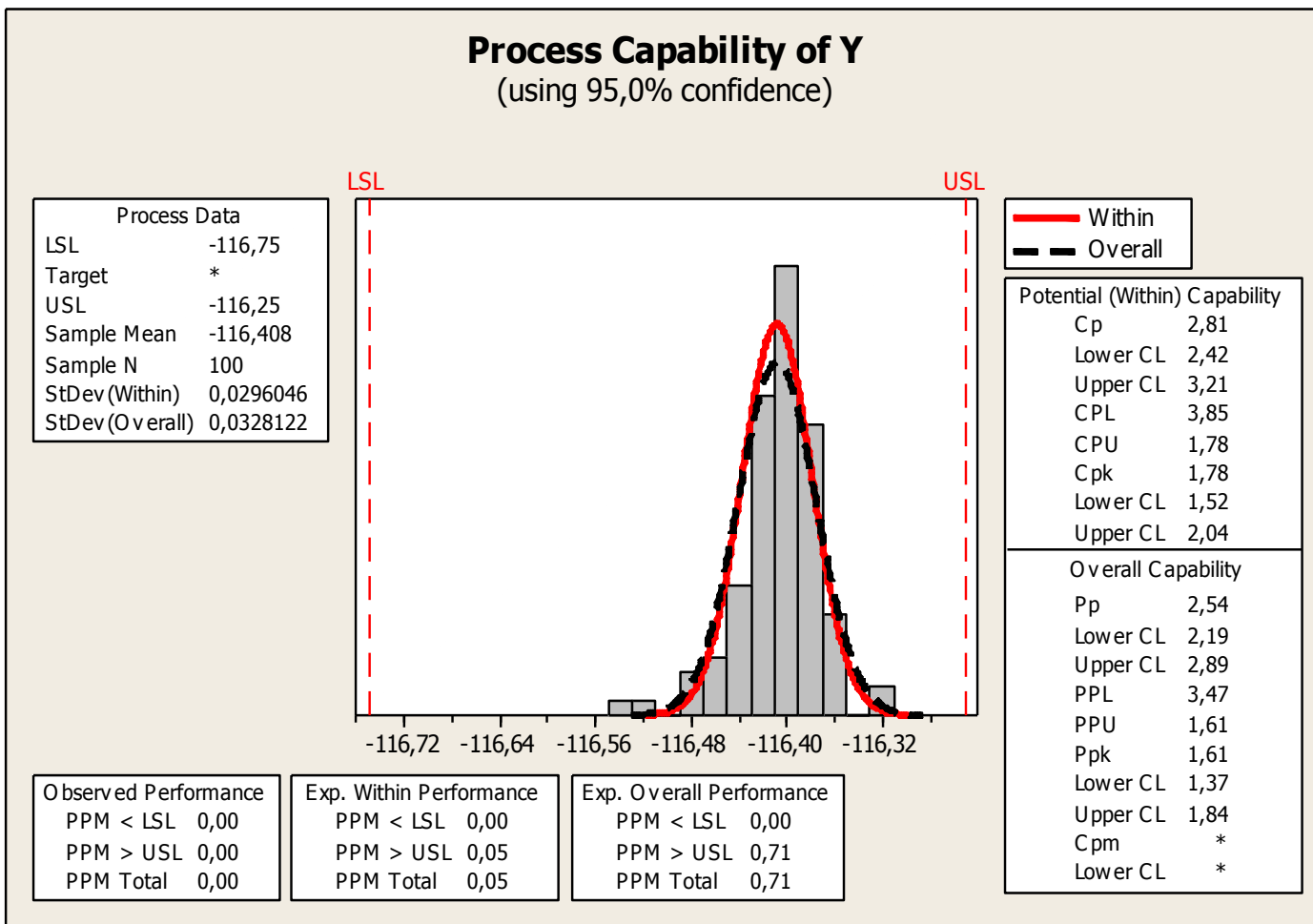
Hotellingův diagram pro (X, Y)



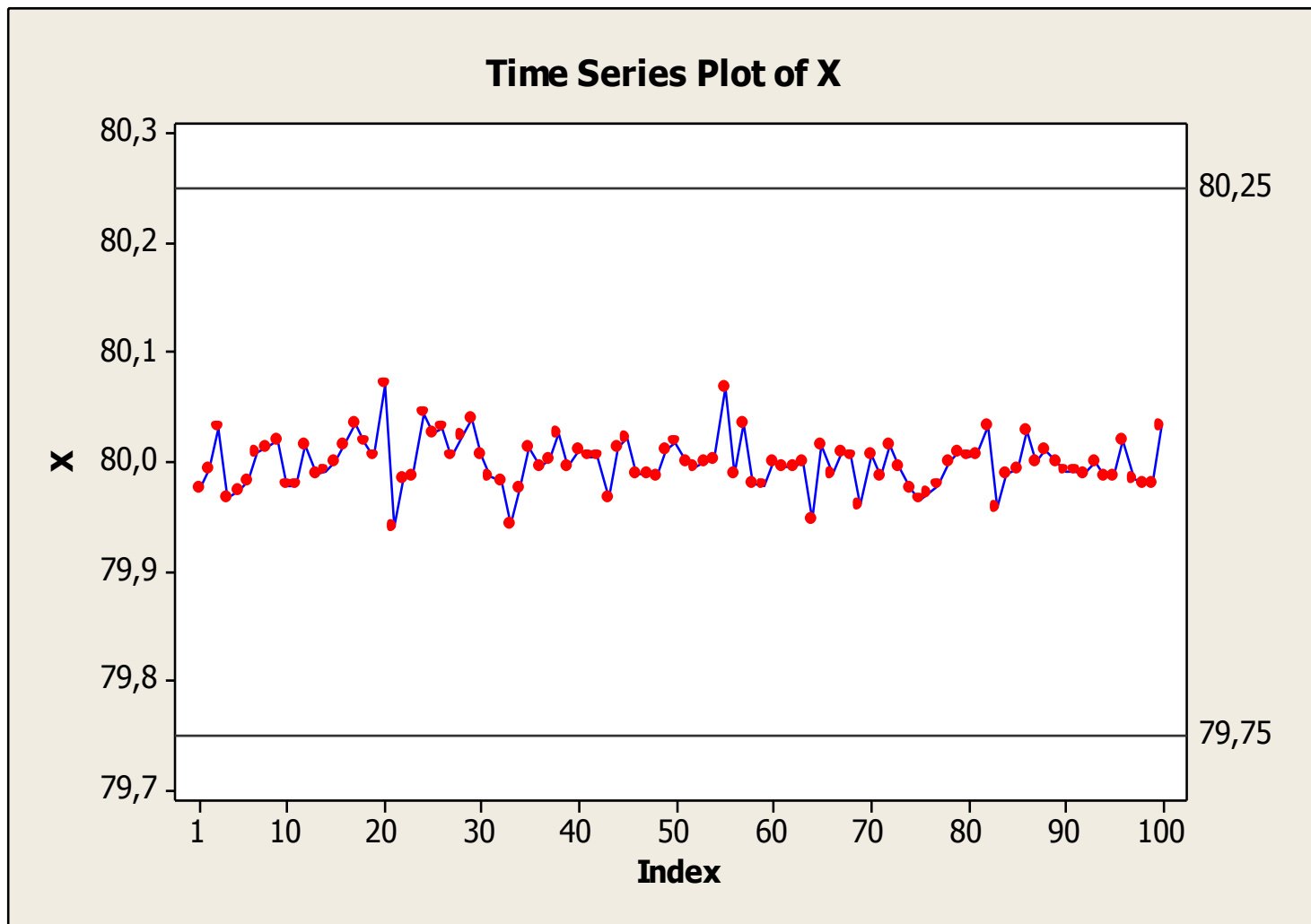
Způsobilost veličiny X



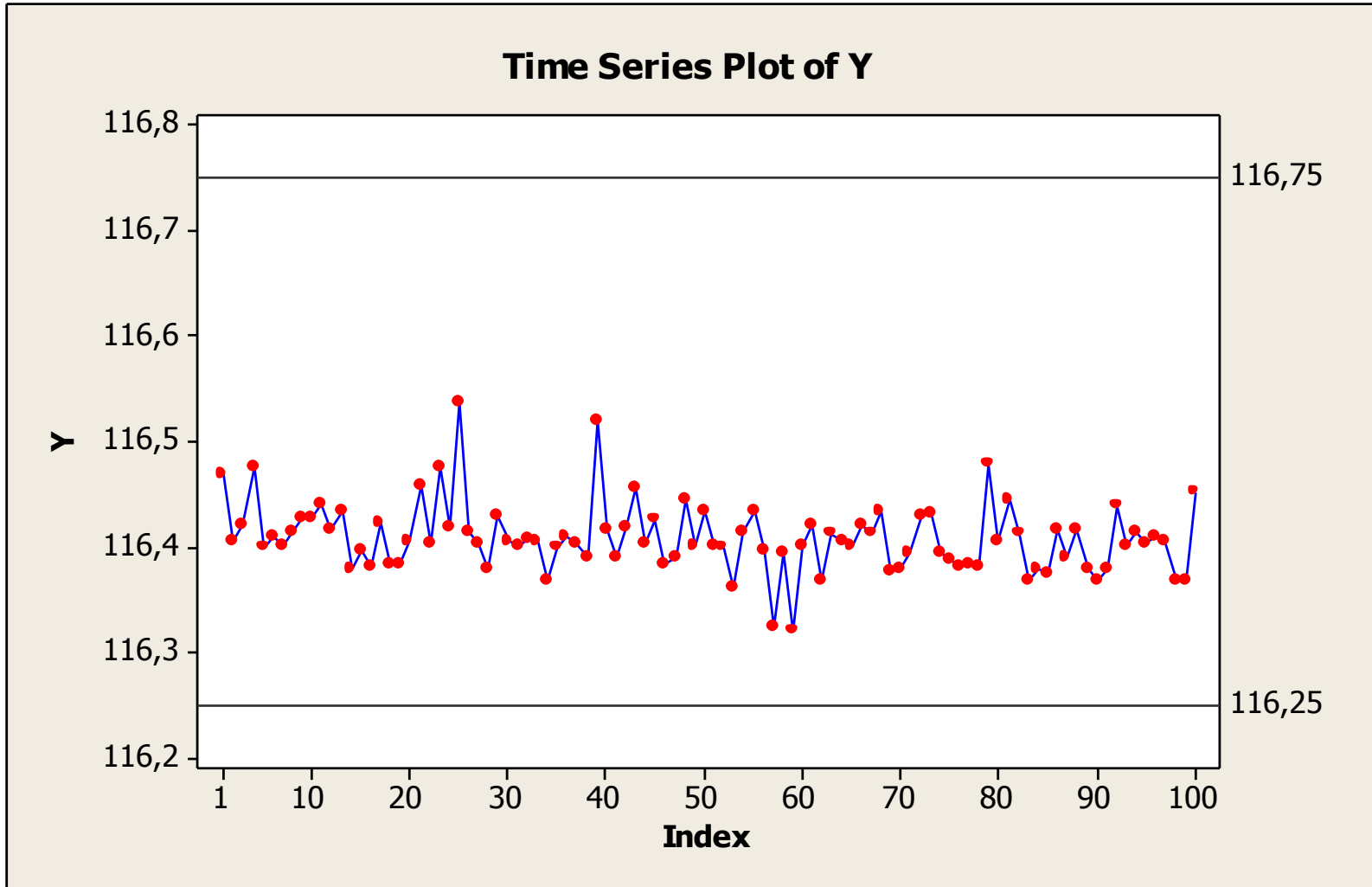
Způsobilost veličiny Y



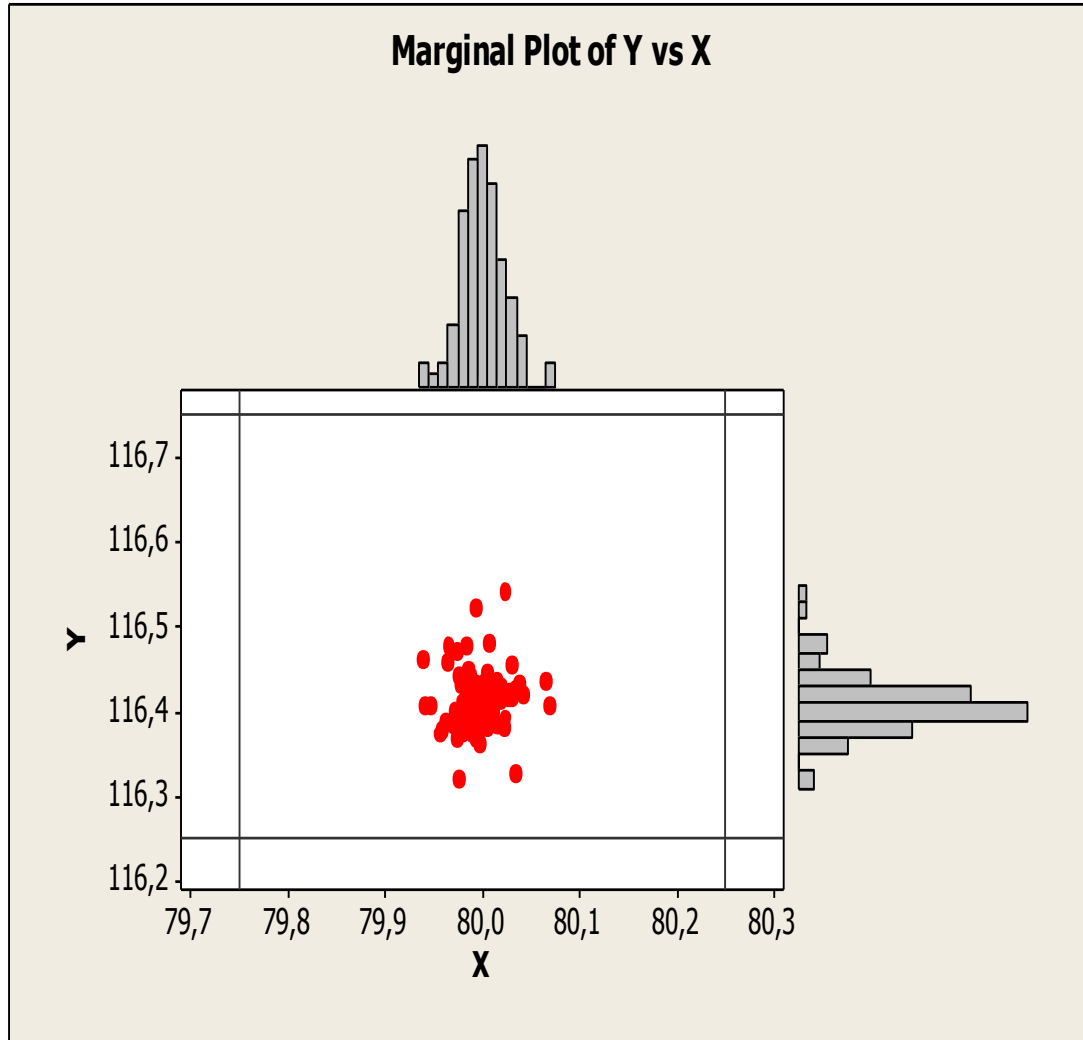
Průběh hodnot souřadnice X vůči tolerancím



Průběh hodnot souřadnice Y vůči tolerancím



Marginální diagram



Další důležité hodnoty pro výpočet odhadu ukazatele způsobilosti

Pearson correlation of X and $Y = -0,099$ P-Value = 0,329

Z toho vyplývá, že veličiny X a Y lze považovat za nezávislé.

Odhad kovarianční matice \mathbf{S} má tvar:

	X	Y
X	0,00053624	-0,00007500
Y	-0,00007500	0,00107664

$$\text{Det } \mathbf{S} = 5,71705 \times 10^{-7}$$

$$(\text{Det } \mathbf{S})^{1/2} = 7,5611 \times 10^{-4}$$

$$Otk = 0,5 \times 0,5 = 0,25$$

$$MOtk = \pi \times 0,25 \times 0,25 = 0,0625\pi = 0,1963$$

$$\text{Plocha pokryvné elipsy} = \pi \times 7,56 \times 10^{-4} \times 11,829 = \pi \times 0,89427 \times 10^{-2}$$

Odhady ukazatele způsobilosti podle jednotlivých přístupů

- Primitivní odhad: $C_p = 2,81$ $C_{pk} = 1,78$
- Podle psti p : $C_p = 1,65$
- Vůči *Otk* : $C_p = 8,88$
- Vůči modifikované oblasti: $C_p = 6,97$
- Podle navrhované normy: $C_p = 2,43$
 $C_{pk} = 1,48$

Závěr

Na základě uvedeného příkladu je zcela jasné vidět, že problematika vícerozměrných ukazatelů způsobilosti a výkonnosti je dosti složitá a je otázkou, který přístup se ujme jako doporučený pro praxi. Pokud by odběratel nyní vyžadoval takový ukazatel, jedině se dohodnout s výrobcem, jaký přístup použít.