



Ekonomická analýza statistické regulace výrobního procesu s údržbou

Eliška Cézová

Obsah

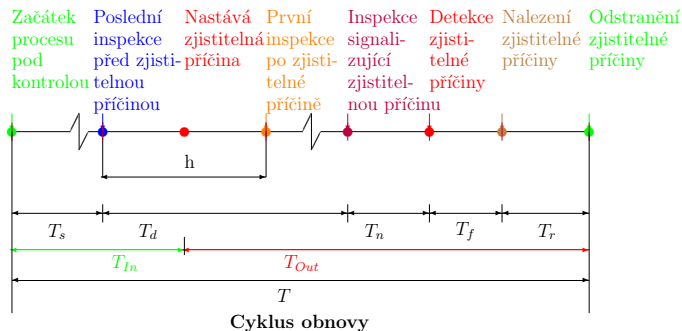
Úvod

Základní model

Rozšířený model

Model s údržbou

Celková doba procesu



T_{In} délka doby procesu pod kontrolou

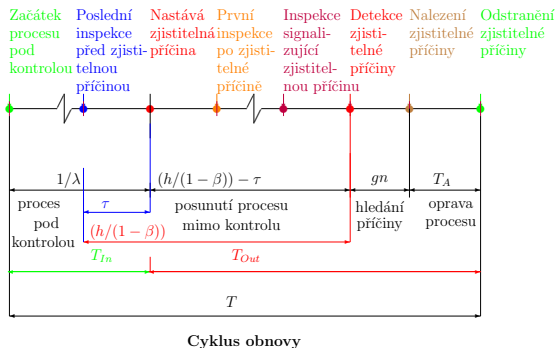
T_{Out} délka doby procesu mimo kontrolu

Celková doba procesu je součet středních hodnot délek jednotlivých období:

$$E(T) = E(T_s) + E(T_d) + E(T_n) + E(T_f) + \gamma E(T_r),$$

- ▶ T_s doba od počátku běhu procesu do s -té inspekce, kdy je proces pod kontrolou [hod]
- ▶ T_d doba od s -té inspekce do n -té inspekce při níž je posun detekován [hod]
- ▶ T_n doba potřebná pro odebrání n vzorků a zakreslení výsledků měření do regulačního diagramu při inspekci [hod]
- ▶ T_f doba potřebná k nalezení zjištěté příčiny, která způsobila posun v procesu [hod]
- ▶ T_r doba potřebná k opravení zjištěté příčiny [hod]
- ▶ $\gamma = 1$ proces pracuje po dobu opravy (mimo statistickou kontrolu) a $\gamma = 0$ pokud proces po dobu opravy stojí.

Délka cyklu procesu pro Duncanův model



Duncanův model

Příklad: Vypočítejme minimální náklady pro daný výrobní proces regulovaný pomocí Shewhartova regulačního diagramu.

- ▶ Posun ve střední hodnotě $\delta = 2$.
- ▶ Pravděpodobnost vzniku poruchy $\lambda = 0.01$.
- ▶ Náklady za hodinu procesu ve stavu pod kontrolou a mimo kontrolu $M = 100$ Kč.
- ▶ Inspekce jsou prováděny každé tři minuty tj. $g = 0.05$ hod.
- ▶ Doba k nalezení zjistitelné příčiny $T_A = 2$ hod.
- ▶ Náklady na falešný signál $C_f = 50$ Kč.
- ▶ Náklady na hledání zjistitelné příčiny $C_r = 25$ Kč.
- ▶ Náklady na odebrání vzorků a zakreslení výběrového bodu do regulačního digramu $C_F = 0.50$ Kč.
- ▶ Náklady na měření odebraného vzorku $C_V = 0.10$ Kč.

$$L = \frac{\lambda MB + \frac{\alpha C_f}{h} + \lambda C_r}{1 + \lambda B} + \frac{C_s}{h} \quad (1)$$

$$\lambda h \frac{\partial B}{\partial n} \left(M - \frac{\alpha C_f}{h} - \lambda C_r \right) + C_V (1 + \lambda B)^2 = 0 \quad (2)$$

$$\lambda h^2 \frac{\partial B}{\partial h} \left(M - \frac{\alpha C_f}{h} - \lambda C_r \right) - \alpha C_f (1 + \lambda B) - C_s (1 + \lambda B)^2 = 0 \quad (3)$$

$$\lambda \frac{\partial B}{\partial k} \left(M - \frac{\alpha C_f}{h} - \lambda C_r \right) + \frac{C_f}{h} \frac{\partial \alpha}{\partial k} (1 + \lambda B) = 0 \quad (4)$$

$$- \frac{\lambda h^2 M}{P^2} \frac{\partial P}{\partial n} + C_V \doteq 0, \quad (5)$$

$$\lambda h^2 M \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2} \right) - \alpha C_f - C_s \doteq 0, \quad (6)$$

$$- \frac{\lambda h^2 M}{P^2} \frac{\partial P}{\partial k} + C_f \frac{\partial \alpha}{\partial k} \doteq 0. \quad (7)$$

Duncanův model

n volíme od 1 . . . 25

$$k = \sqrt{-2 \log \frac{C_V \sqrt{2\pi n}}{\delta C_f}}. \quad (8)$$

$$h \doteq \sqrt{\frac{\alpha C_f + C_s}{\lambda M \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2}\right)}}. \quad (9)$$

Dopočítané hodnoty k , h a L .

n	k	α	P	h	B	L
1	3.4609	0.00053843	0.0720	0.2164	4.9467	7.8426
2	3.3592	0.00078157	0.2978	0.5085	3.5536	5.1239
3	3.2983	0.00097260	0.5658	0.8183	3.1876	4.3666
4	3.2544	0.0011	0.7720	1.0969	3.0733	4.0950
5	3.2200	0.0013	0.8947	1.3126	3.0621	4.0230
6	3.1915	0.0014	0.9561	1.4645	3.1012	4.0484
7	3.1673	0.0015	0.9832	1.5714	3.1647	4.1210
8	3.1461	0.0017	0.9940	1.6530	3.2388	4.2143

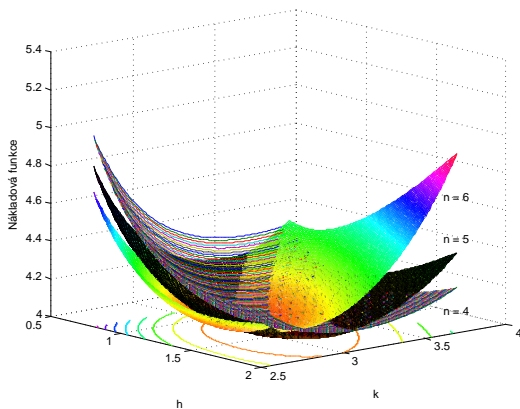
Výsledek získaný pomocí Nelder-Meadovy metody:

- ▶ $L = 4.0121$,
- ▶ $n = 4.8054$,
- ▶ $h = 1.3863$,
- ▶ $k = 3.0571$.

Výsledek získaný prohledáváním v dvojrozměrné oblasti pro h a k s krokem 0.001 při různých volbách $n = 1, \dots, 25$

- ▶ $L = 4.0133$
- ▶ $n = 5$,
- ▶ $h = 1.4072$,
- ▶ $k = 3.0822$.

Průběh ztrátové funkce v Duncanově modelu pro různé hodnoty $n = 4, 5$ a 6



Lorenzen-Vancův model

V roce 1986 T. J. Lorenzen a L. C. Vance uvedli ekonomický model, který v sobě zahrnuje náklady:

- ▶ náklady na vyhledání falešného signálu,
- ▶ náklady na hledání zjištělné příčiny,
- ▶ náklady na opravu procesu,
- ▶ náklady na inspekce (na odběr vzorků).

Dobu mezi odebráním vzorků h bereme jako parametr, který optimalizujeme.

- ▶ T_0 průměrná doba potřebná na vyhledání falešného signálu,
- ▶ T_1 a T_2 očekávaná doba na odhalení a opravení zjištělné příčiny.

$$E(T_{In}) = \frac{1}{\lambda} + \frac{(1 - \gamma_1)sT_0}{ARL_0}, \quad (10)$$

- ▶ střední doba do poruchy běžícího procesu, prodlužuje dobu, kdy je proces pod kontrolou o intervaly, ve kterých proces stojí a my detekujeme falešný signál. Parametr $\gamma_1 = 1$, pokud proces po dobu detekce běží jinak 0.

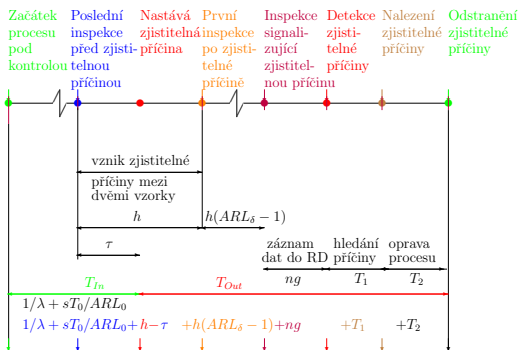
$$E(T_{Out}) = -\tau + ng + h(ARL_\delta) + T_1 + T_2. \quad (11)$$

- ▶ nastane zjištělná příčina v procesu, aniž by byla detekována regulačním diagramem. ($h - \tau$), kde τ je doba, kdy nastane zjištělná příčina mezi i -tým a $(i + 1)$ -ním vzorkem.
- ▶ doba signalizující stav mimo kontrolu $h(ARL_\delta - 1)$.
- ▶ doba potřebná na odebrání a zakreslení vzorků do diagramu je gn .
- ▶ doba k detekování zjištělné příčiny T_1
- ▶ doba k odstranění zjištělné příčiny a opravy procesu T_2 .

Tabulka hodnot pro k od 2.5 do 3.5 s minimální ztrátovou funkcí

n	k	α	P	ARL_0	ARL_δ	h	L
4	2.5	0.0124	0.9322	80.5196	1.0716	1.7099	4.1994
4	2.6	0.0093	0.9192	107.2688	1.0879	1.5972	4.1320
4	2.7	0.0069	0.9032	144.2180	1.1072	1.5008	4.0836
4	2.8	0.0051	0.8849	195.6847	1.1300	1.4180	4.0529
5	2.9	0.0037	0.9420	267.9797	1.0615	1.5262	4.0305
5	3	0.0027	0.9295	370.3983	1.0758	1.4737	4.0164
5	3.1	0.0019	0.9150	516.7407	1.0929	1.4274	4.0133
5	3.2	0.0014	0.8983	727.6559	1.1132	1.3852	4.0199
5	3.3	0.00096685	0.8794	1034.3	1.1371	1.3455	4.0353
5	3.4	0.00067386	0.8252	1484	1.1653	1.3070	4.0589
6	3.5	0.00046526	0.9191	2149.3	1.0880	1.4530	4.0744

Délka cyklu pro Lorenzen a Vancův model



Lorenzen Vancův model

Střední ztráta plynoucí z nekvalitní výroby za cyklus je rovna

$$E(C_Q) = \frac{C_I}{\lambda} + C_O \left(-\tau + ng + h(ARL_\delta) + \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2 \right).$$

Náklady na detekci a opravu zjištěné příčiny zahrnují i náklady na vyšetřování falešného signálu:

$$E(C_D) = \frac{sC_f}{ARL_0} + C_r.$$

Náklady na odběr vzorků za cyklus vyjádříme jako:

$$E(C_S) = \frac{C_s \left(\frac{1}{\lambda} - \tau + ng + h(ARL_\delta) + \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2 \right)}{h}.$$

Celkové náklady za jednotku času $E(L)$ vyjádříme jako:

$$E(L) = \frac{E(C_Q) + E(C_D) + E(C_S)}{E(T)}$$

Lorenzen Vancův model

Příklad: Uvažujme proces řízený Shewhartovým regulačním diagramem \bar{X} s těmito parametry:

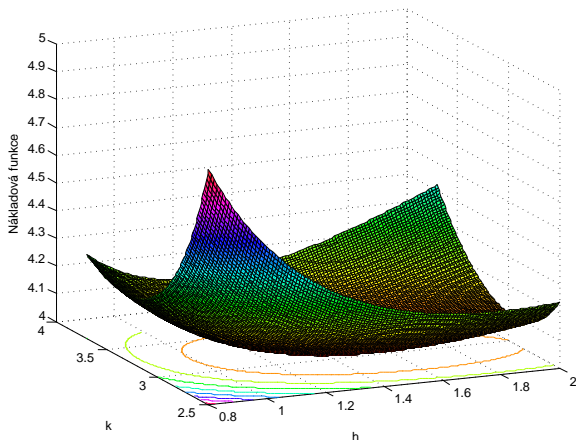
- ▶ zjistitelná příčina způsobí posunutí ve střední hodnotě $\delta = 2$,
- ▶ pravděpodobnost doby do vzniku poruchy má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda = 0.01$,
- ▶ náklady za hodinu v procesu pod kontrolou jsou $C_I = 0$ Kč,
- ▶ náklady za hodinu v procesu mimo kontrolu činí $C_O = 100$ Kč.
- ▶ náklady na vyšetření falešného signálu $C_f = 50$ Kč,
- ▶ náklady na vyhledání zjistitelné příčiny a její odstranění $C_r = 25$ Kč,
- ▶ variabilní náklady za vzorek $C_V = 0.10$ Kč,
- ▶ fixní náklady za vzorek $C_F = 0.50$ Kč,
- ▶ doba mezi odebráním vzorků $g = 0.05$ hod,
- ▶ dobu k nalezení zjistitelné příčiny $T_2 = 2$ hod.

Dobu na hledání falešného signálu T_0 a dobu na odhalení zjistitelné příčiny T_1 neuvažujeme.

a) Výsledek pomocí Nelder-Meadovy simplexové metody je nejminimálnější hodnota ztrátové funkce $L = 4.0116$ pro hodnoty $n = 4.8020$, $h = 1.3870$, $k = 3.0547$.

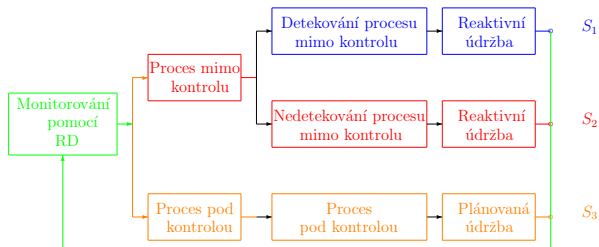
b) Výsledek pomocí prohledávání v dvojrozměrné oblasti pro h a k s krokem 0.001 při různých volbách $n = 1, \dots, 25$, je minimální hodnota ztrátové funkce $L = 4.0128$ pro hodnoty $n = 5$, $h = 1.408$, $k = 3.08$.

Průběh ztrátové funkce v Lorenzově-Vancově modelu pro hodnotu $n = 5$.

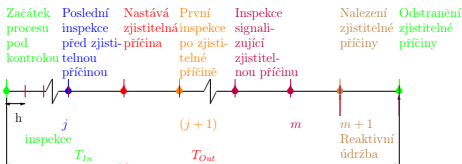
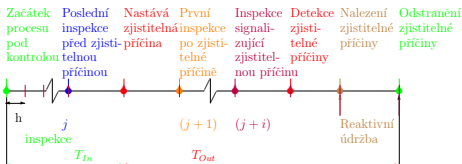


Model s údržbou

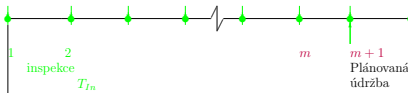
Systém řízení procesu a údržby vychází ze tří scénářů. Průběh procesu zaznamenáváme do regulačních diagramů, z kterých zjišťujeme, zda je proces pod statistickou kontrolou nebo mimo statistickou kontrolu. Pokud je ve stavu pod kontrolou, provedeme v plánovaném čase údržbu procesu, která předchází poruše v procesu a reaktivní údržbě. Reaktivní údržbu provádíme tehdy, kdy regulační diagram detekuje proces mimo kontrolu. Po provedení reaktivní nebo plánované údržby se proces vrací do stavu pod statistickou kontrolou.



Ve všech třech scénářích předpokládáme, že začínáme ve stavu pod kontrolou, inspekce provádíme po h hodinách a po údržbě se proces vrací do stavu jako nový.



Začátek procesu pod kontrolou



Hodnota ztrátové funkce:

$$E(L) = E(C)/E(T)$$

Celková průměrná délka cyklu:

$$E(T) = E[T|S_1]P(S_1) + E[T|S_2]P(S_2) + E[T|S_3]P(S_3).$$

Celkové průměrné náklady:

$$E(C) = E[C|S_1]P(S_1) + E[C|S_2]P(S_2) + E[C|S_3]P(S_3).$$

Proces začíná ve stavu pod kontrolou s mechanismem poruchy, které má Weibullovo rozdělení s hustotou $f(t) = \lambda^\nu \nu t^{\nu-1} e^{-(\lambda t)^\nu}$, kde $\lambda, \nu, t \geq 0$ a distribuční funkcí, kterou označíme $F(t)$. Pravděpodobnosti jednotlivých scénářů vyjádříme těmito vztahy:

$$\begin{aligned} P[S_1] &= F(mh)P(\text{signál} \mid \text{stav mimo kontrolu}) \\ P[S_2] &= F((m+1)h) - F(mh)P(\text{signál} \mid \text{stav mimo kontrolu}) \\ P[S_3] &= 1 - F((m+1)h) \end{aligned}$$

V době pod kontrolou počítáme s průměrnou dobou do poruchy a počtem zjištěných falešných poplachů, které vyjádříme pomocí useknutého Weibullova rozdělení na intervalu $\langle 0, (m+1)h \rangle$ s hustotou

$$f^{\text{tr}}(t; m+1) = \frac{\lambda^\nu \nu t^{\nu-1} e^{-(\lambda t)^\nu}}{1 - e^{-(\lambda(m+1)h)^\nu}}, \quad 0 \leq t \leq (m+1)h.$$

Ve scénáři (S_1) předpokládáme detekci zjištělné příčiny, která posune proces do stavu mimo kontrolu, po které následuje provedení reaktivní údržby.

Střední dobu cyklu obnovy za předpokladu scénáře (S_1), lze vyjádřit jako součet doby pod kontrolou a doby mimo kontrolu:

$$E[T|S_1] = E[T_{in}|S_1] + E[T_{out}|S_1].$$

Vzeme-li do úvahy možnost zastavení procesu v dobách identifikace falešných poplachů (viz. (10)), dostáváme

$$E[T_{in}|S_1] = \int_0^{mh} t f^{Tr}(t; m+1) dt + (1 - \gamma_A) \frac{sT_0}{ARL_0},$$

kde s je počet inspekcí, které proběhnou, když je proces pod kontrolou ve scénáři (S_1). V době, kdy je proces mimo kontrolu ve scénáři (S_1), detekujeme zjištělnou příčinu, kterou vypočítáme následovně:

$$E[T_{out}|S_1] = hARL_\delta - \tau + gn + T_A + T_R,$$

kde $\tau = \sum_{i=0}^m \int_{ih}^{(i+1)h} (t - ih) f^{Tr}(t; m+1) dt$. Celkové náklady ze scénáře (S_1) jsou součtem nákladů ze ztráty kvality, nákladů na vzorkování a nákladů na hledání falešného poplachu a údržbu:

$$E[C|S_1] = E[C_Q|S_1] + E[C_S|S_1] + E[C_D|S_1].$$

Náklady ze ztráty kvality ve scénáři (S_1) jsou:

$$E[C_Q|S_1] = C_I \int_0^{mh} t f^{Tr}(t; m+1) dt + C_O \left[hARL_\delta - \tau + gn + \gamma_A T_A + \gamma_R T_R \right].$$

Náklady na vzorkování ve scénáři (S_1) jsou:

$$E[C_S|S_1] = C_S \frac{\int_0^{mh} t f^{Tr}(t; m+1) dt + h(ARL_\delta) - \tau + gn + \gamma_A T_A + \gamma_R T_R}{h}$$

Náklady na hledání falešného poplachu a údržbu jsou:

$$E[C_D|S_1] = \frac{sC_f}{ARL_0} + C_R$$

Ve scénáři (S_2) předpokládáme, že zjistitelná příčina není detekována a proces je mimo kontrolu, provádíme reaktivní údržbu. Celková doba ze scénáře (S_2), která součtem doby pod kontrolou a dobou mimo kontrolu ze scénáře (S_2), je:

$$E[T|S_2] = E[T_{in}|S_2] + E[T_{out}|S_2]$$

$$E[T_{in}|S_2] = \int_0^{(m+1)h} tf\bar{r}(t; m+1)dt + (1 - \gamma_A) \frac{sT_0}{ARL_0}$$

$$E[T_{out}|S_2] = (m+1)h - \int_0^{(m+1)h} tf\bar{r}(t; m+1)dt + T_R$$

Celkové náklady ze scénáře (S_2) jsou součtem nákladů ze ztráty kvality, nákladů na vzorkování a nákladů na hledání falešného poplachu a údržbu:

$$E[C|S_2] = E[C_Q|S_2] + E[C_S|S_2] + E[C_D|S_2]$$

Náklady ze ztráty kvality ve scénáři (S_2) jsou:

$$E[C_Q|S_2] = C_I \int_0^{(m+1)h} tf\bar{r}(t; m+1)dt + C_O \left[(m+1)h - \int_0^{(m+1)h} tf(t)dt + \gamma_R T_R \right]$$

Náklady na vzorkování ve scénáři (S_2) jsou:

$$E[C_S|S_2] = mC_s$$

Náklady na hledání falešného poplachu a provedení reaktivní údržby ve scénáři (S_2) jsou:

$$E[C_D|S_2] = \frac{sC_f}{ARL_0} + C_R$$

Ve scénáři (S_3) předpokládáme stav pod kontrolou, provedeme pouze plánovanou údržbu, která předchází zjiitelné příčině. Dobu potřebnou pro realizaci plánované údržby budeme dále označovat symbolem T_P . Celková doba ve scénáři (S_3) je:

$$E[T|S_3] = (m + 1)h + (1 - \gamma_A) \frac{mT_0}{ARL_0} + T_P$$

Celkové náklady ze scénáře S_3 jsou součtem nákladů ze ztráty kvality, nákladů na vzorkování a nákladů na hledání falešného poplachu a údržbu:

$$E[C|S_3] = E[C_Q|S_3] + E[C_S|S_3] + E[C_D|S_3]$$

Náklady ze ztráty kvality ve scénáři (S_3) jsou (γ_P je indikátor běhu procesu v průběhu plánované údržby):

$$E[C_Q|S_3] = C_I[(m + 1)h + \gamma_P T_P]$$

Náklady na vzorkování ve scénáři (S_3) jsou:

$$E[C_S|S_3] = mC_S$$

Náklady na plánovanou údržbu ve scénáři (S_3) jsou:

$$E[C_D|S_3] = \frac{mC_f}{ARL_0} + C_P$$

Příklad: Uvažujme proces řízený Shewhartovým diagramem \bar{X} s těmito parametry:

- ▶ zjistitelná příčina způsobí posunutí ve střední hodnotě $\delta = 2$,
- ▶ pravděpodobnost doby vzniku do poruchy má weibullovo rozdělení s parametrem měřítka $\lambda = 0.05$ a tvaru $\nu = 1$,
- ▶ náklady za hodinu v procesu pod kontrolou $C_I = 0$ Kč,
- ▶ náklady za hodinu v procesu mimo kontrolu činí $C_O = 100$ Kč,
- ▶ náklady na vyšetření falešného poplachu $C_f = 5$ Kč,
- ▶ náklady na provedení reaktivní údržby $C_R = 50$ Kč,
- ▶ náklady na provedení plánované údržby $C_P = 75$ Kč,
- ▶ variabilní náklady na odebírání vzorku jsou $C_V = 1$ Kč,
- ▶ fixní náklady za vzorek jsou $C_F = 5$ Kč,
- ▶ počet vzorků před plánovanou údržbou $m = 300$,
- ▶ doba na odběr a jejich zakreslení do diagramu $g = 0.05$ hod,
- ▶ doba strávená hledáním falešného signálu $T_0 = 1$ hod,
- ▶ doba k určení výskytu zjistitelné příčiny $T_A = 1$ hod,
- ▶ doba k provedení reaktivní údržby $T_R = 3$,
- ▶ dobu k provedení plánované údržby $T_P = 8$.

Proces běží během hledání příčiny, reaktivní údržby a plánované údržby stanovíme parametr $\gamma_A = \gamma_R = \gamma_P = 1$. Průběh ztrátové funkce pro $n = 5$ je na následujícím obrázku. Minimální hodnoty $L = 28.4632$ je dosaženo při $h = 2.7$ a $k = 0.7$.

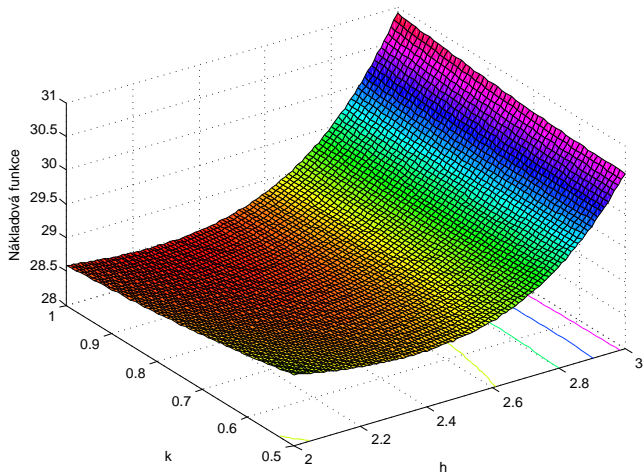


Figure: Průběh ztrátové funkce pro tři scénáře pro hodnotu $n = 5$.

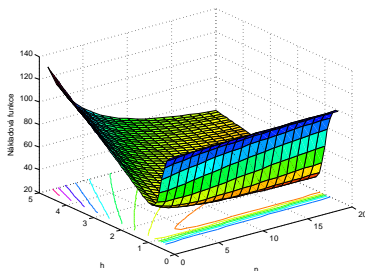


Figure: Průběh ztrátové funkce pro tři scénáře pro hodnotu $k = 3.024$.

Samotná ekonomická optimalizace nevede vždy k nejlepším výsledkům. V daném případě by nízká hodnota k vedla k nepříjemně nízké hodnotě $ARL_0 = 3.621$, tedy k velmi četným falešným poplachům.

- ▶ provedeme ekonomicko-statistickou optimalizaci, kde určíme optimální hodnotu k_0 pro požadovanou minimální hodnotu ARL_0 ,
- ▶ provedeme ekonomickou optimalizaci pro tuto optimální hodnotu $k_0 = 3.024$ pro požadovanou hodnotu $ARL_0 = 400$,
- ▶ výsledkem ekonomické optimalizace je: $L = 31.3277$, $n = 11$, $h = 2.4$, výsledná hodnota $ARL_0 = 400.8716$.

Použitá literatura:

- ▶ Cézová, E. (2008) *Ekonomicko-statistický návrh regulačního diagramu*, Request 08, CQR VUT Brno
- ▶ Duncan, A. J. (1956), *The economic design of X-charts used to maintain current control of a process*. Journal of the American Statistical Association, Vol. 51, No. 274, pp. 228-242
- ▶ Linderman K., Anderson J. C., McKone-Sweet K.E. (2005), *An integrated systems approach to process control and maintenance*. European Journal of Operational Research 164, pp. 324 - 340
- ▶ Lorenzen, T. J. and Vance, L.C. (1986), *The economic design of control charts: a unified approach*. Technometrics 28, pp. 3-10
- ▶ McWilliams P. T., (1994), *Economic, statistical and economic-statistical X chart designs*. Journal of Quality Technology, vol. 26, No.3, pp. 227-238

Děkuji za pozornost.