

# **Optimalizace provozních podmínek**

Eva Jarošová

# Obsah

1. Experimenty pro optimalizaci provozních podmínek
2. EVOP
  - klasický postup
  - využití statistického softwaru
3. Centrální složený návrh
  - model odezvové plochy
  - určení stacionárního bodu
  - postup v případě sedlového bodu

# Experimenty pro optimalizaci provozních podmínek

## Předpoklad – kvantitativní faktory

- EVOP
  - Faktoriální návrh  $2^N$  doplněný centrálním bodem
  - Simplex
- Metoda nejrychlejšího spádu
  - Faktoriální návrh  $2^N$  nebo  $2^{N-k}$  doplněný centrálním bodem
- Centrální kompozitní návrh
  - Faktoriální návrh  $2^N$  nebo  $2^{N-k}$ , centrální bod, axiální body
    - kulovitá experimentální oblast
    - krychlová experimentální oblast
- Box-Behnken
  - Vyvážené neúplné bloky, 3 úrovně faktorů,  $N$  větší než 2

# EVOP

Evolutionary operation, Box (1957)

Postupná změna provozních podmínek

Cíl – optimalizace provozních podmínek při plném provozu

Systematické provádění malých změn úrovně faktorů představujících provozní podmínky

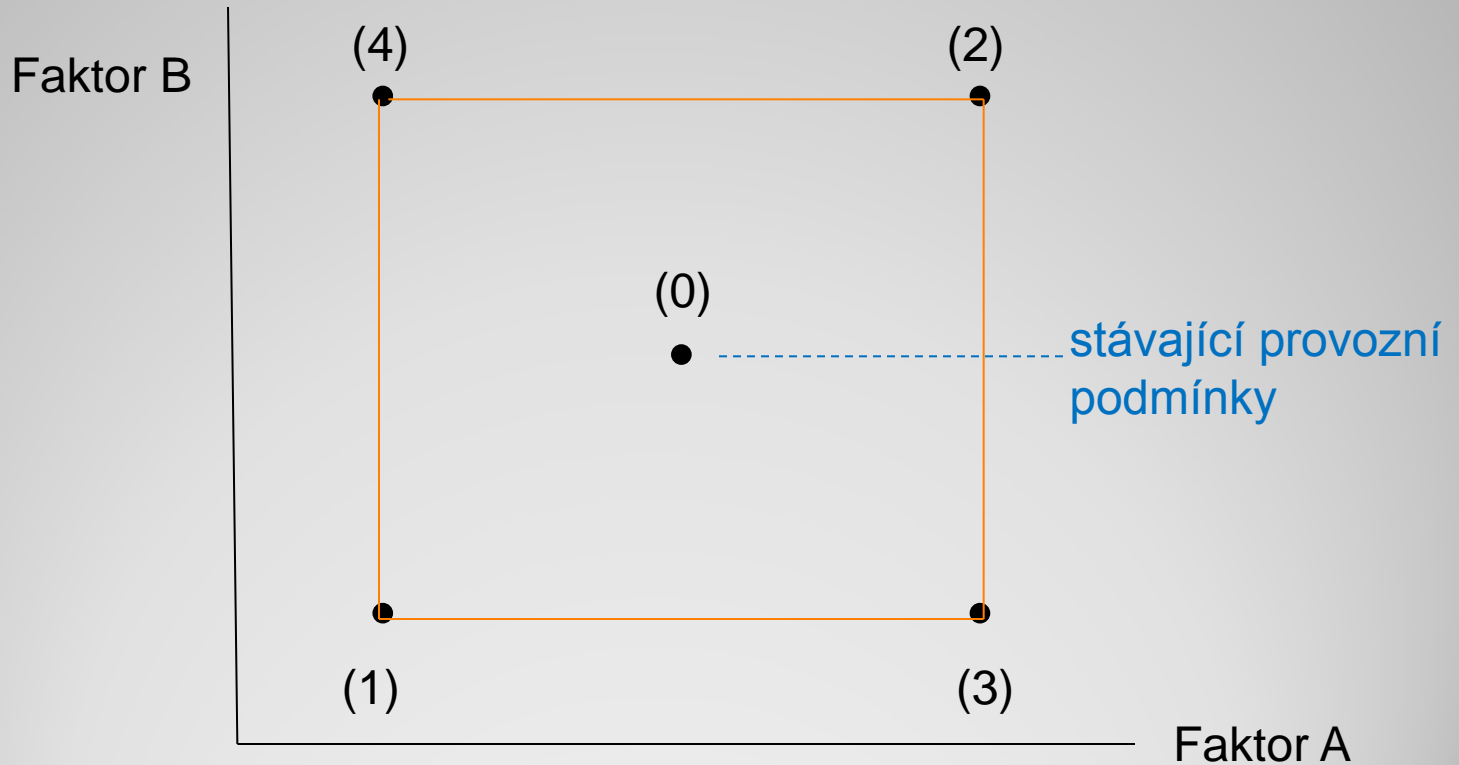
Faktoriální návrh  $2^2$  nebo  $2^3$

Místo bloků cykly

# Postup

Systematické střídání experimentálních bodů

Postup v cyklech a fázích



# Vyhodnocení – klasický postup

Klasický postup (Box, 1957)

po každém cyklu (počínaje druhým)

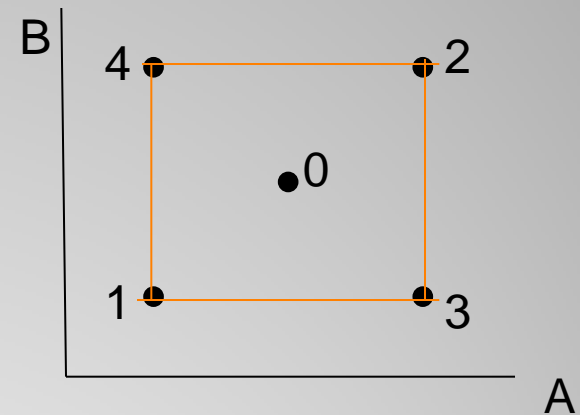
- odhad efektů A, B, AB
- odhad změny střední hodnoty (CIM)
- odhad experimentální chyby
- konstrukce konfidenčních intervalů
- rozhodnutí o dalším pokračování (nový cyklus nebo fáze)

# Odhad efektů

$$\text{Efekt A} \quad \frac{\bar{y}_{(2)} + \bar{y}_{(3)}}{2} - \frac{\bar{y}_{(1)} + \bar{y}_{(4)}}{2}$$

$$\text{Efekt B} \quad \frac{\bar{y}_{(2)} + \bar{y}_{(4)}}{2} - \frac{\bar{y}_{(1)} + \bar{y}_{(3)}}{2}$$

$$\text{Efekt AB} \quad \frac{\bar{y}_{(1)} + \bar{y}_{(2)}}{2} - \frac{\bar{y}_{(3)} + \bar{y}_{(4)}}{2}$$



Změna střední hodnoty

$$\frac{\bar{y}_{(0)} + \bar{y}_{(1)} + \bar{y}_{(2)} + \bar{y}_{(3)} + \bar{y}_{(4)}}{5} - \bar{y}_{(0)} = \frac{1}{5} (\bar{y}_{(1)} + \bar{y}_{(2)} + \bar{y}_{(3)} + \bar{y}_{(4)} - 4\bar{y}_{(0)})$$

# Odhad experimentální chyby

po každém cyklu

$$\hat{\sigma} = \frac{R}{d_2} \sqrt{1 - \frac{1}{k}} = \frac{R}{2,326} \sqrt{1 - \frac{1}{k}}$$

R – rozpětí z 5 hodnot

(rozdílů nové hodnoty a dosavadního průměru  
v každém bodě)

k – počet cyklů

zpřesnění pomocí průměru směrodatných odchylek  
z provedených cyklů



# Konfidenční intervaly

Konfidence přibližně 0,95

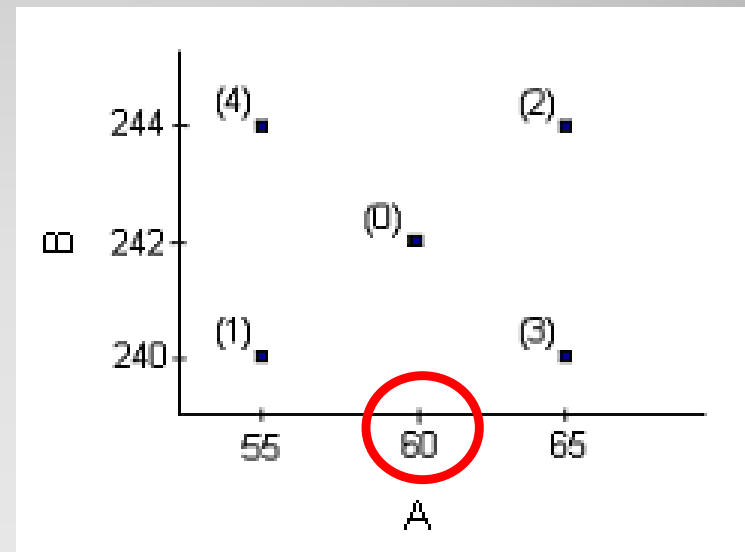
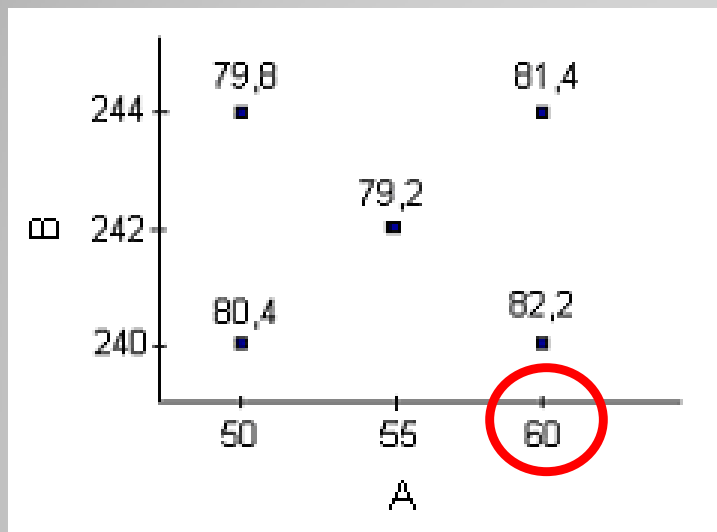
odhad efektu  $\pm 2 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{k}}$

odhad CIM  $\pm 1,789 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{k}}$

- a) Obsahují-li všechny intervaly 0 → nový cyklus
- b) Interval pro efekt A (B, AB) neobsahuje 0 → nová fáze, **výběr** nového centrálního bodu
- c) Interval pro CIM neobsahuje 0 → nacházíme se blízko optimálních podmínek

# Nová fáze

Předpoklad – významný pouze hlavní efekt faktoru A

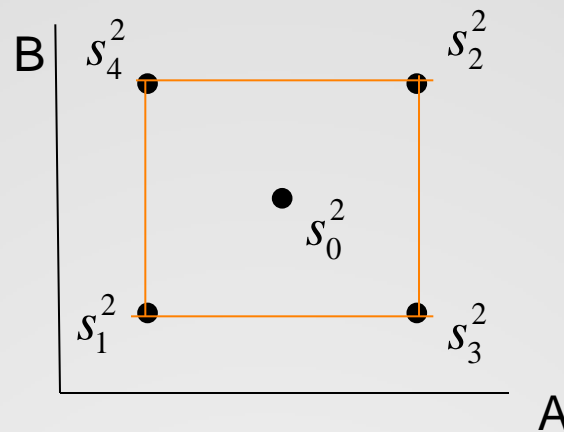


# Alternativní vyhodnocení

- Jiný způsob odhadu změny střední hodnoty

$$\bar{y}_{(0)} - \frac{1}{4}(\bar{y}_{(1)} + \bar{y}_{(2)} + \bar{y}_{(3)} + \bar{y}_{(4)})$$

- Odhad experimentální chyby pomocí průměru výběrových rozptylů v experimentálních bodech



# Vyhodnocení pomocí regresního modelu

- Normování proměnných → úrovně -1, 0, 1
- Odhad efektů pomocí parametrů regresního modelu
- Test nedostatku shody
- Odhad experimentální chyby pomocí průměru výběrových rozptylů (Pure Error, Mean Square)
- Testy hypotéz o nulových parametrech modelu

## Odhad efektů A,B,AB pomocí regresního modelu

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon$$

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2$$

|                        |           |
|------------------------|-----------|
| Efekt A                | $2b_1$    |
| Efekt B                | $2b_2$    |
| Interakce AB           | $2b_{12}$ |
| Efekt centrálního bodu |           |

$$\bar{y}_0 - \frac{1}{4}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4)$$

# Výstup procedury pro regresní model po 2 cyklech

| Parameter Estimates |    |                    |                |         |         |
|---------------------|----|--------------------|----------------|---------|---------|
| Variable            | DF | Parameter Estimate | Standard Error | t Value | Pr >  t |
| Intercept           | 1  | 80.77000           | 0.42264        | 191.11  | <.0001  |
| A                   | 1  | 0.88750            | 0.47252        | 1.88    | 0.1094  |
| B                   | 1  | -0.86250           | 0.47252        | -1.83   | 0.1177  |
| AB                  | 1  | 0.33750            | 0.47252        | 0.71    | 0.5019  |

| Analysis of Variance |    |                |             |         |        |
|----------------------|----|----------------|-------------|---------|--------|
| Source               | DF | Sum of Squares | Mean Square | F Value | Pr > F |
| Model                | 3  | 13.16375       | 4.38792     | 2.46    | 0.1607 |
| Error                | 6  | 10.71725       | 1.78621     |         |        |
| Lack of Fit          | 1  | 1.89225        | 1.89225     | 1.07    | 0.3479 |
| Pure Error           | 5  | 8.82500        | 1.76500     |         |        |
| Corrected Total      | 9  | 23.88100       |             |         |        |

Závěr: žádný efekt významný, další cyklus

# Výstup procedury pro regresní model po 3 cyklech

| Parameter Estimates |    |                    |                |         |         |
|---------------------|----|--------------------|----------------|---------|---------|
| Variable            | DF | Parameter Estimate | Standard Error | t Value | Pr >  t |
| Intercept           | 1  | 80.34667           | 0.47468        | 169.26  | <.0001  |
| A                   | 1  | 1.08000            | 0.71202        | 1.52    | 0.1575  |
| B                   | 1  | -0.77000           | 0.71202        | -1.08   | 0.3026  |
| AB                  | 1  | -0.16667           | 0.53071        | -0.31   | 0.7594  |

| Analysis of Variance |    |                |             |         |        |
|----------------------|----|----------------|-------------|---------|--------|
| Source               | DF | Sum of Squares | Mean Square | F Value | Pr > F |
| Model                | 3  | 8.13933        | 2.71311     | 0.80    | 0.5180 |
| Error                | 11 | 37.17800       | 3.37982     |         |        |
| Lack of Fit          | 3  | 11.31967       | 3.77322     | 1.17    | 0.3807 |
| Pure Error           | 8  | 25.85833       | 3.23229     |         |        |
| Corrected Total      | 14 | 45.31733       |             |         |        |

Závěr: žádný efekt významný, další cyklus

# Výstup procedury pro regresní model po 4 cyklech

| Parameter Estimates |    |                    |                |         |         |
|---------------------|----|--------------------|----------------|---------|---------|
| Variable            | DF | Parameter Estimate | Standard Error | t Value | Pr >  t |
| Intercept           | 1  | 80.58500           | 0.38486        | 209.39  | <.0001  |
| A                   | 1  | 1.27143            | 0.65053        | 1.95    | 0.0684  |
| B                   | 1  | -0.57857           | 0.65053        | -0.89   | 0.3870  |
| AB                  | 1  | -0.06250           | 0.43029        | -0.15   | 0.8863  |

Testová statistika využívá reziduální rozptyl

| Analysis of Variance |    |                |             |         |        |
|----------------------|----|----------------|-------------|---------|--------|
| Source               | DF | Sum of Squares | Mean Square | F Value | Pr > F |
| Model                | 3  | 13.62821       | 4.54274     | 1.53    | 0.2443 |
| Error                | 16 | 47.39729       | 2.96233     |         |        |
| Lack of Fit          | 3  | 11.11895       | 3.70632     | 1.33    | 0.3078 |
| Pure Error           | 13 | 36.27833       | 2.79064     |         |        |
| Corrected Total      | 19 | 61.02550       |             |         |        |

Při použití čisté chyby

$$t = \sqrt{\frac{11,31571}{2,79064}} = 2,014$$

P-hodnota 0,0326

Závěr: efekt A významný, změna úrovně faktoru A, nová fáze



# Rozklad součtu čtverců podle jednotlivých efektů

| Parameter Estimates |    |                    |                |         |         |            |
|---------------------|----|--------------------|----------------|---------|---------|------------|
| Variable            | DF | Parameter Estimate | Standard Error | t Value | Pr >  t | Type II SS |
| Intercept           | 1  | 80.58500           | 0.38486        | 209.39  | <.0001  | 129879     |
| A                   | 1  | 1.27143            | 0.65053        | 1.95    | 0.0684  | 11.31571   |
| B                   | 1  | -0.57857           | 0.65053        | -0.89   | 0.3870  | 2.34321    |
| AB                  | 1  | -0.06250           | 0.43029        | -0.15   | 0.8863  | 0.06250    |

# Centrální složený návrh

- Faktoriální návrh  $2^N$
- Centrální bod
- $2N$  axiálních bodů
  - Ve vzdálenosti  $\pm\alpha$  od centrálního bodu

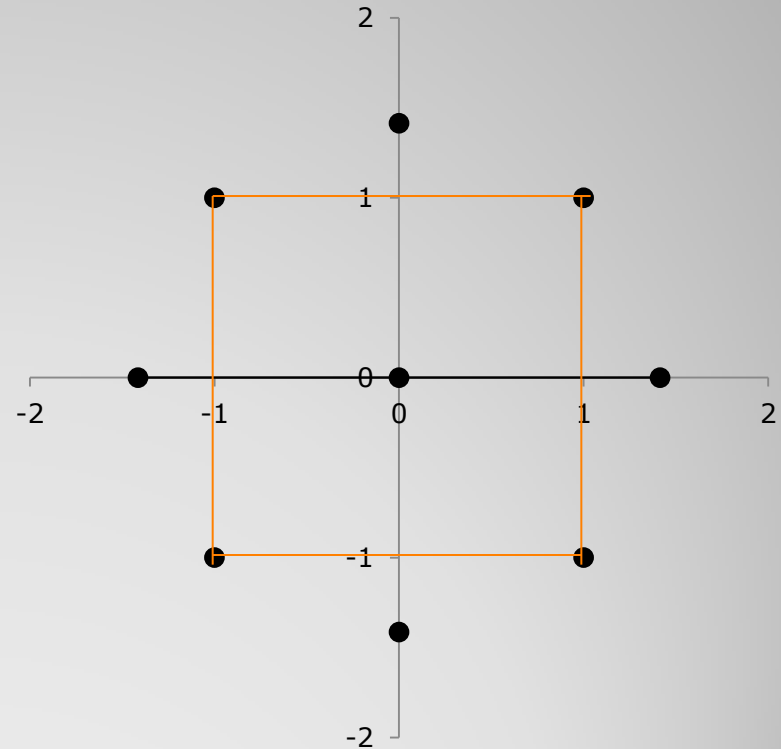
$$\alpha = \sqrt[4]{2^N}$$

| N | $\alpha$                |
|---|-------------------------|
| 2 | $\sqrt{2}$              |
| 3 | $\sqrt[4]{2^3} = 1,682$ |
| 4 | 2                       |

# Kulovitá experimentální oblast

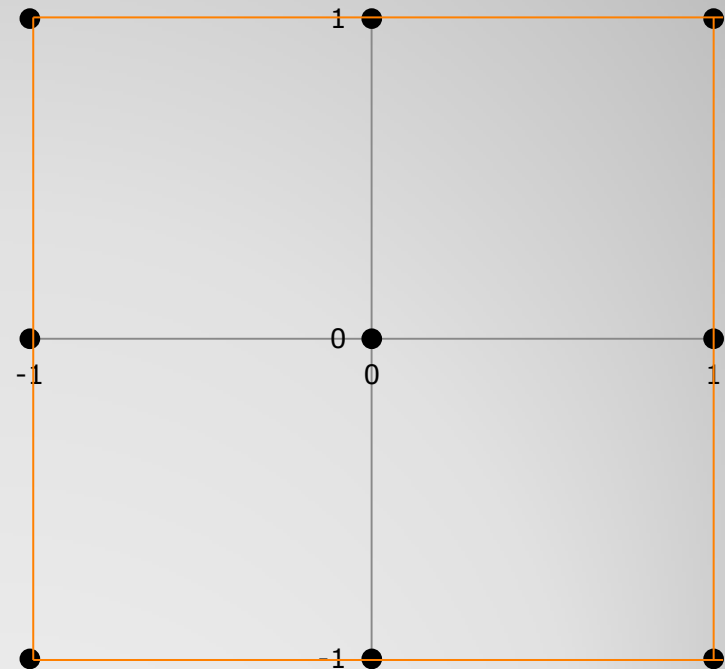
Příklad pro  $N = 2$

| A           | B           |
|-------------|-------------|
| -1          | -1          |
| 1           | -1          |
| -1          | 1           |
| 1           | 1           |
| 0           | 0           |
| $-\sqrt{2}$ | 0           |
| $\sqrt{2}$  | 0           |
| 0           | $-\sqrt{2}$ |
| 0           | $\sqrt{2}$  |



# Krychlová experimentální oblast

| A  | B  |
|----|----|
| -1 | -1 |
| 1  | -1 |
| -1 | 1  |
| 1  | 1  |
| 0  | 0  |
| -1 | 0  |
| 1  | 0  |
| 0  | -1 |
| 0  | 1  |



# Vlastnosti

- Splňuje nutnou podmínku pro modelování plochou 2. stupně  
(min.  $1+2N+N(N-1)/2$  exp. bodů, min. 3 úrovně faktorů)
- Faktoriální část představuje návrh optimální z hlediska přesnosti odhadu parametrů modelu hlavních efektů nebo hlavních efektů a interakcí
- Centrální bod poskytuje informaci o nelinearitě plochy a umožňuje odhad čisté chyby
- Axiální body umožňují odhad koeficientů u kvadratických členů
- Rotační návrh (přesnost odhadu odezvy stejná ve všech bodech stejně vzdálených od centrálního bodu)

# Postup

- Faktoriální experiment  $2^N$  (1 replikace)
- Doplnění centrálního bodu (alespoň 2 replikace)
- Test nedostatku shody
- Doplnění  $2N$  axiálních bodů
- Model odezvové plochy 2. stupně
- Určení stacionárního bodu
- Kanonická analýza (typ stacionárního bodu)
- Hřebenová analýza

# Příklad – lisování pelet z borovice

Sledovaný znak – hustota

Faktory

tlak (A)

teplota (B)

vlhkost (C)

velikost frakce (D)

7 pelet v každém experimentálním bodě

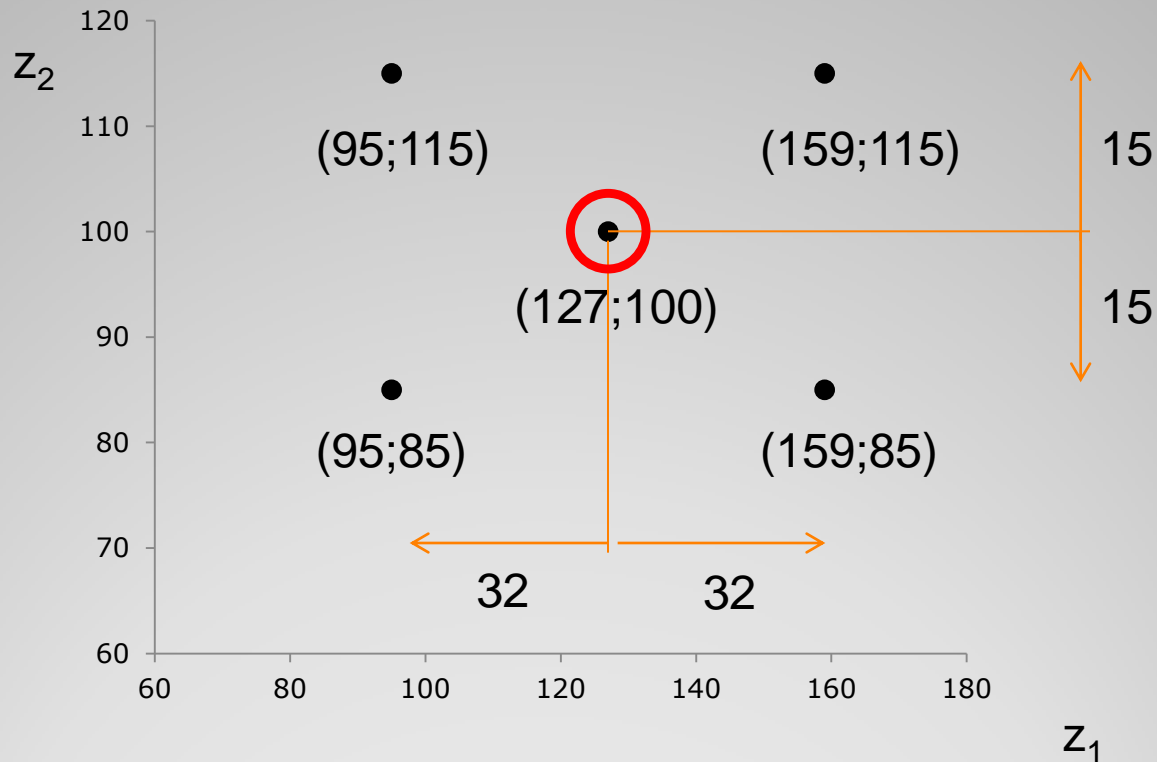
Y - průměr ze 7 hodnot

# 1.krok - faktoriální návrh $2^4$

|     | A     | B     | C     | D     | A     | B     | C     | D     | Response |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| row | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ | $z_4$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $y$      |
| 1   | 95    | 85    | 8     | 1     | -1    | -1    | -1    | -1    | 1.135    |
| 2   | 159   | 85    | 8     | 1     | 1     | -1    | -1    | -1    | 1.157    |
| 3   | 95    | 115   | 8     | 1     | -1    | 1     | -1    | -1    | 1.191    |
| 4   | 159   | 115   | 8     | 1     | 1     | 1     | -1    | -1    | 1.236    |
| 5   | 95    | 85    | 12    | 1     | -1    | -1    | 1     | -1    | 0.800    |
| 6   | 159   | 85    | 12    | 1     | 1     | -1    | 1     | -1    | 1.007    |
| 7   | 95    | 115   | 12    | 1     | -1    | 1     | 1     | -1    | 1.174    |
| 8   | 159   | 115   | 12    | 1     | 1     | 1     | 1     | -1    | 1.236    |
| 9   | 95    | 85    | 8     | 4     | -1    | -1    | -1    | 1     | 1.089    |
| 10  | 159   | 85    | 8     | 4     | 1     | -1    | -1    | 1     | 1.081    |
| 11  | 95    | 115   | 8     | 4     | -1    | 1     | -1    | 1     | 1.167    |
| 12  | 159   | 115   | 8     | 4     | 1     | 1     | -1    | 1     | 1.206    |
| 13  | 95    | 85    | 12    | 4     | -1    | -1    | 1     | 1     | 0.755    |
| 14  | 159   | 85    | 12    | 4     | 1     | -1    | 1     | 1     | 0.960    |
| 15  | 95    | 115   | 12    | 4     | -1    | 1     | 1     | 1     | 1.128    |
| 16  | 159   | 115   | 12    | 4     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1.135    |



# Ukázka normování



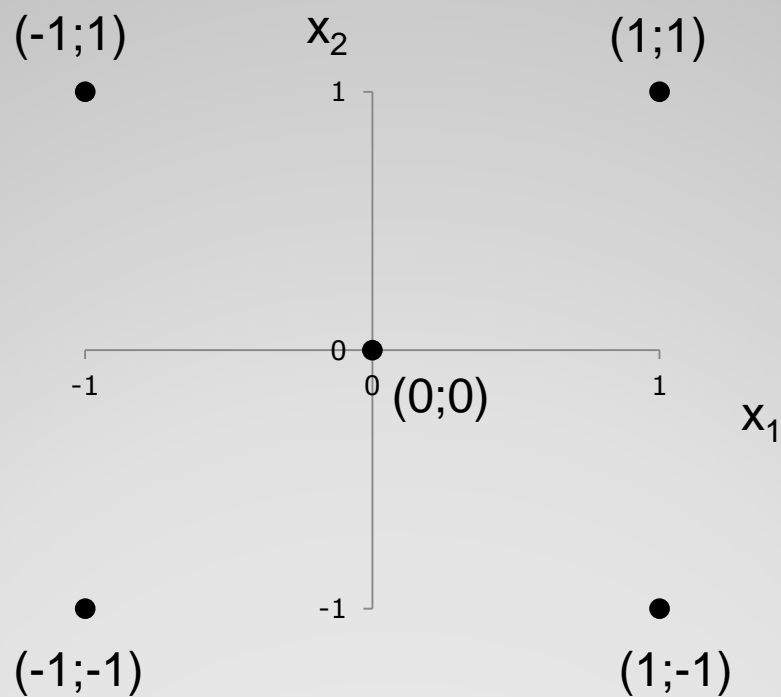
$$x_1 = \frac{z_1 - 127}{32}$$

$$x_2 = \frac{z_2 - 100}{15}$$

$$x_3 = \frac{z_3 - 10}{2}$$

$$x_4 = \frac{z_4 - 2.5}{1.5}$$

# Návrh $2^2$ v kódovaných jednotkách



# Shrnutí výsledků analýzy rozptylu

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_{12} x_1 x_2 + \dots + \beta_{34} x_3 x_4 + \varepsilon$$

Příspěvky jednotlivých faktorů (hlavní efekty + dvoufaktorové interakce)

| Factor | DF | Sum of Squares | Mean Square | F Value | Pr > F |
|--------|----|----------------|-------------|---------|--------|
| A      | 4  | 0.035319       | 0.008830    | 3.66    | 0.0936 |
| B      | 4  | 0.184549       | 0.046137    | 19.13   | 0.0031 |
| C      | 4  | 0.121882       | 0.030471    | 12.64   | 0.0080 |
| D      | 4  | 0.011563       | 0.002891    | 1.20    | 0.4140 |

Závěr: Faktor D (velikost frakce) není důležitý  
(p-hodnota podstatně větší než 0,05)

# Doplnění faktoriálního návrhu o centrální bod

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0     | 0     | 0     | 0     | 1.016 |
| 0     | 0     | 0     | 0     | -     |

Dvě nebo více replikací umožní  
odhad experimentální chyby (čistá chyba, pure error)  
test nedostatku shody  
pokud model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_{12} x_1 x_2 + \dots + \beta_{34} x_3 x_4 + \varepsilon$$

vyhovuje, změna úrovní faktorů,  
jinak doplnění axiálními body (centrální složený návrh)

# Doplnění axiálních bodů

Pozn.: chybná realizace experimentu  
jediné měření v centrálním bodě  
zbytečně dále uvažován faktor D

Dále postup pro všechny 4 faktory  
Axiální body v kódovaných jednotkách

| A     | B     | C     | D     |
|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
| -2    | 0     | 0     | 0     |
| 2     | 0     | 0     | 0     |
| 0     | -2    | 0     | 0     |
| 0     | 2     | 0     | 0     |
| 0     | 0     | -2    | 0     |
| 0     | 0     | 2     | 0     |
| 0     | 0     | 0     | -2    |
| 0     | 0     | 0     | 2     |

# Shrnutí výsledků analýzy rozptylu

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_{12} x_1 x_2 + \dots + \beta_{34} x_3 x_4 + \beta_{11} x_1^2 + \dots + \beta_{44} x_4^2 + \varepsilon$$

Příspěvky jednotlivých faktorů (hlavní efekty + dvoufaktorové interakce + kvadratické členy)

| Factor | DF | Sum of Squares | Mean Square | F Value | Pr > F |
|--------|----|----------------|-------------|---------|--------|
| A      | 5  | 0.045557       | 0.009111    | 2.30    | 0.1228 |
| B      | 5  | 0.194773       | 0.038955    | 9.83    | 0.0013 |
| C      | 5  | 0.141049       | 0.028210    | 7.12    | 0.0044 |
| D      | 5  | 0.017490       | 0.003498    | 0.88    | 0.5264 |

Závěr: Faktor D (proměnná  $x_4$ ) vyloučen z modelu

# Odhady parametrů modelu

| Parameter        | DF | Estimate  | Standard Error | <i>t</i> Value | Pr >   <i>t</i> |
|------------------|----|-----------|----------------|----------------|-----------------|
| <b>Intercept</b> | 1  | 1.031108  | 0.028078       | 36.72          | <.0001          |
| A                | 1  | 0.030625  | 0.012594       | 2.43           | 0.0280          |
| B                | 1  | 0.076036  | 0.012453       | 6.11           | <.0001          |
| C                | 1  | -0.049105 | 0.011557       | -4.25          | 0.0007          |
| A*B              | 1  | -0.017062 | 0.015424       | -1.11          | 0.2861          |
| A*C              | 1  | 0.023938  | 0.015424       | 1.55           | 0.1415          |
| B*C              | 1  | 0.050812  | 0.015424       | 3.29           | 0.0049          |
| A*A              | 1  | 0.014125  | 0.013923       | 1.01           | 0.3264          |
| B*B              | 1  | 0.016259  | 0.008312       | 1.96           | 0.0693          |
| C*C              | 1  | 0.016765  | 0.008807       | 1.90           | 0.0763          |

# Maticové vyjádření rovnice modelu

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{33} x_3^2 + \varepsilon$$

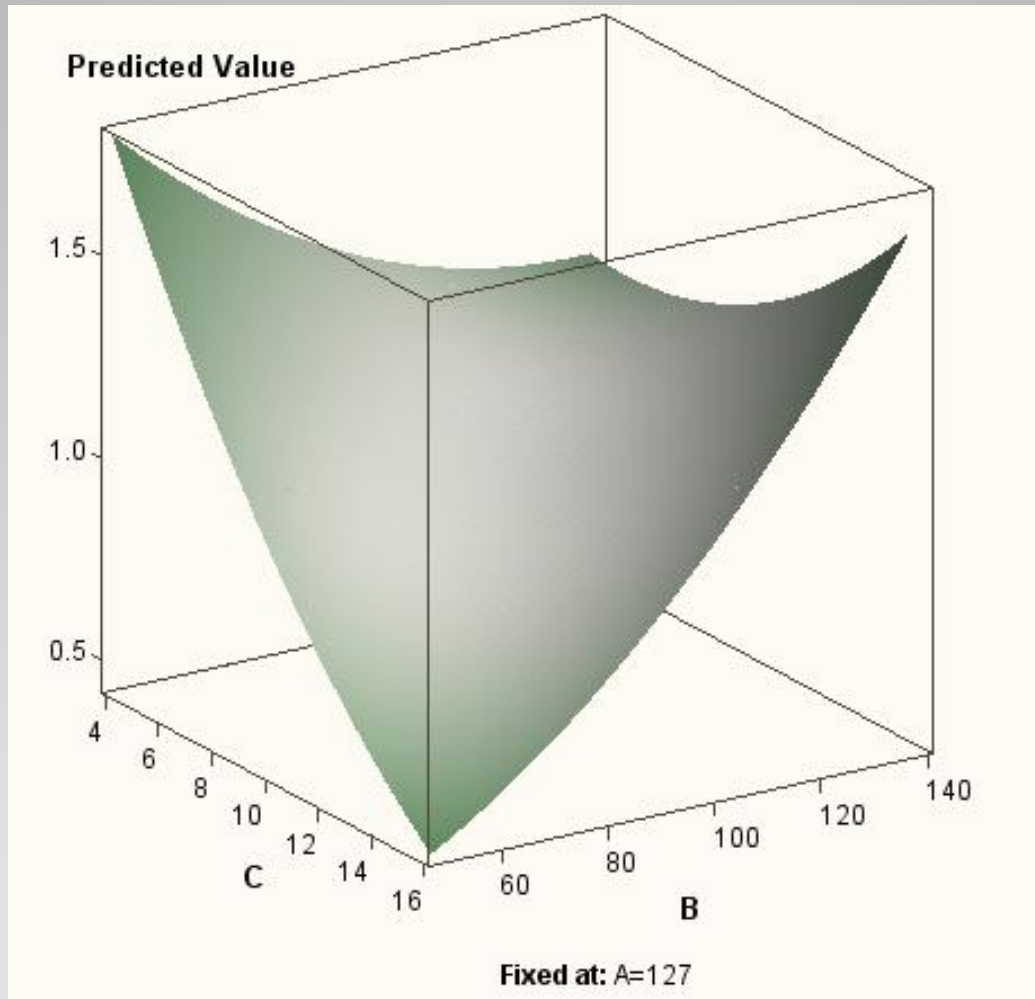
$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}/2 & b_{13}/2 \\ b_{12}/2 & b_{22} & b_{23}/2 \\ b_{13}/2 & b_{23}/2 & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\hat{y} = b_0 + \mathbf{x}^T \mathbf{b} + \mathbf{x}^T \hat{\mathbf{B}} \mathbf{x}$$



# Ukázka znázornění odezvové plochy



# Určení stacionárního bodu

$$\mathbf{x}_s = -\frac{1}{2}\hat{\mathbf{B}}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.763585 \\ 0.820396 \\ -0.790467 \end{bmatrix} \quad \text{v kódovaných jednotkách}$$

$$\mathbf{z}_s = \begin{bmatrix} 175.9 \\ 123.3 \\ 6.0 \end{bmatrix} \quad \text{v původních jednotkách}$$

Typ stacionárního bodu

charakteristická čísla matice  $\hat{\mathbf{B}}$

všechna kladná – minimum

všechna záporná – maximum

různá znaménka – sedlový bod

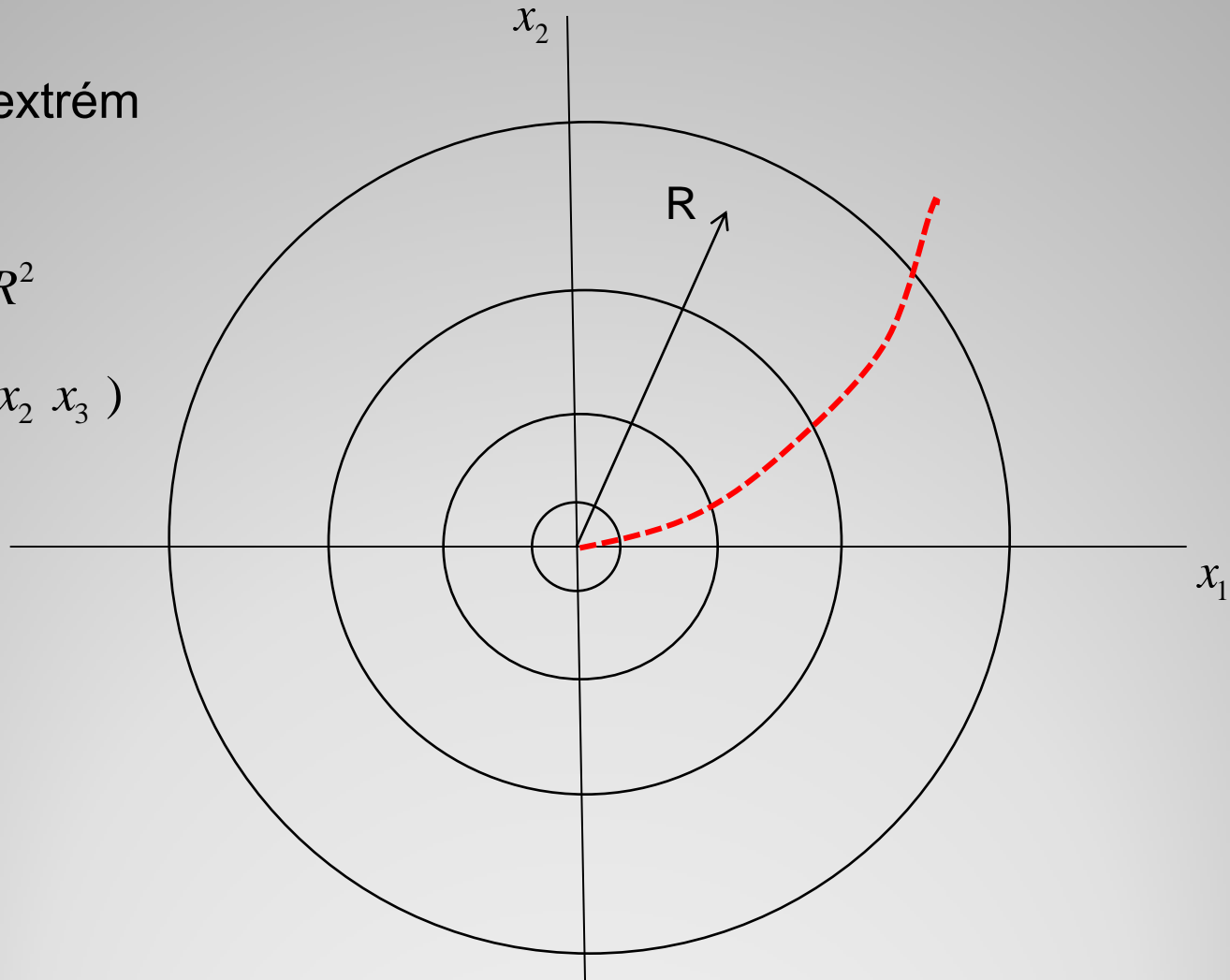
# Hřebenová analýza - podstata

vázaný extrém

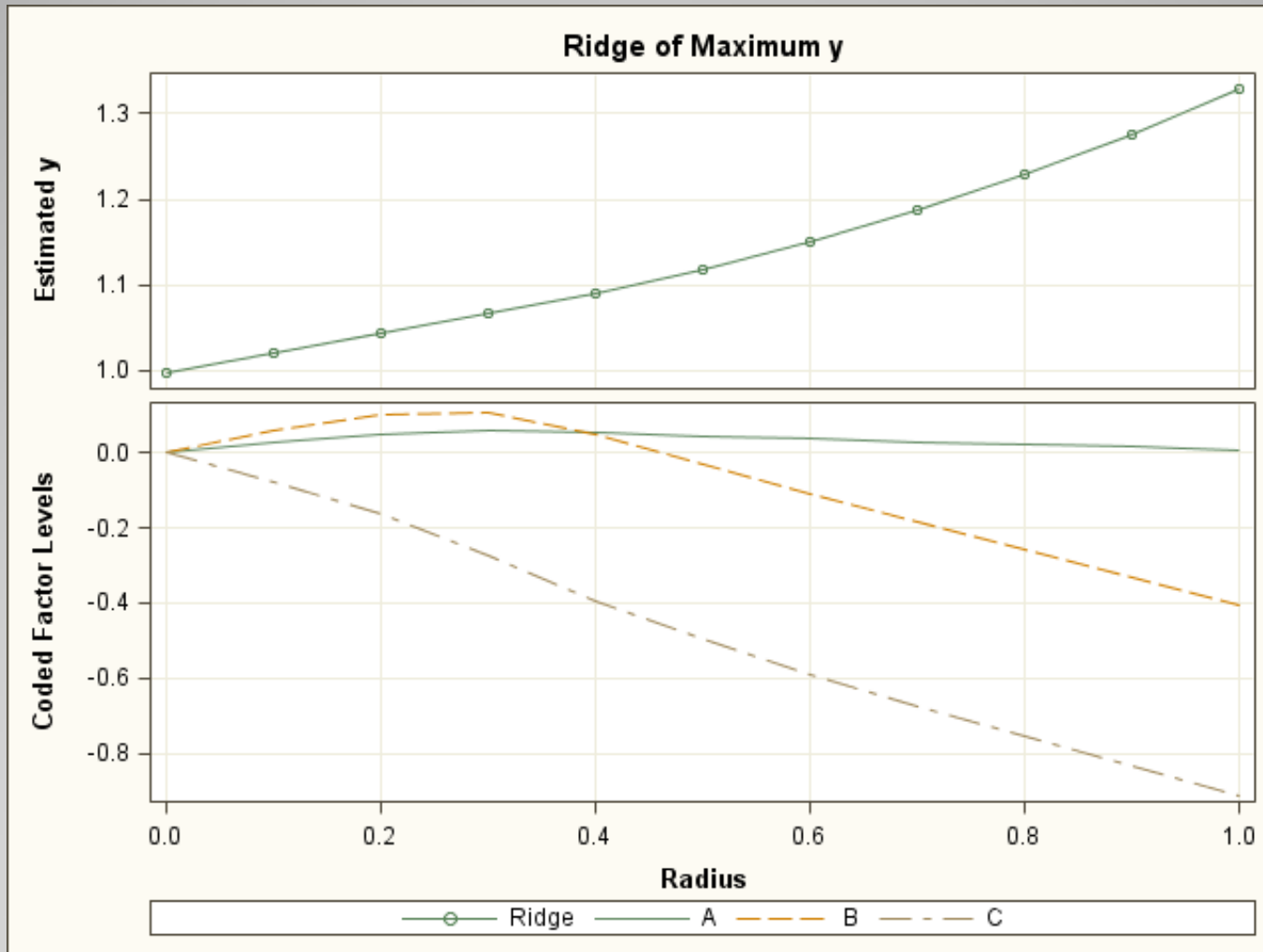
$\max \hat{y}$

$$\mathbf{x}_p^T \mathbf{x}_p = R^2$$

$$\mathbf{x}_p^T = (x_1 \ x_2 \ x_3)$$



# Hřebenová analýza - výsledky



### Estimated Ridge of Maximum Response for Variable y

| Coded Radius | Estimated Response | Standard Error | Uncoded Factor Values |          |          |
|--------------|--------------------|----------------|-----------------------|----------|----------|
|              |                    |                | A                     | B        | C        |
| 0.0          | 0.99716            | 0.02859        | 127.00000             | 92.50000 | 10.00000 |
| 0.1          | 1.02146            | 0.02848        | 128.83724             | 94.64026 | 9.61534  |
| 0.2          | 1.04426            | 0.02795        | 130.20616             | 96.35116 | 9.17928  |
| 0.3          | 1.06625            | 0.02720        | 130.71395             | 96.51392 | 8.62909  |
| 0.4          | 1.08970            | 0.02711        | 130.37388             | 94.25291 | 8.03127  |
| 0.5          | 1.11706            | 0.02881        | 129.86267             | 91.32654 | 7.51494  |
| 0.6          | 1.14919            | 0.03289        | 129.36111             | 88.41579 | 7.05561  |
| 0.7          | 1.18636            | 0.03946        | 128.87812             | 85.57279 | 6.62726  |
| 0.8          | 1.22866            | 0.04830        | 128.40909             | 82.78418 | 6.21718  |
| 0.9          | 1.27614            | 0.05914        | 127.95002             | 80.03534 | 5.81880  |
| 1.0          | 1.32883            | 0.07174        | 127.49814             | 77.31567 | 5.42839  |

# Předpověď pro optimální provozní podmínky

Konfidenční interval pro předpověď

$$\hat{y}_o \pm t_{1-\alpha/2}(n-p)\hat{\sigma}\sqrt{1+\mathbf{x}_o^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_o}$$

(1,110; 1,548)

$\hat{y}_o = 1,328825$     vyrovnaná hodnota v nalezeném optimu

$\hat{\sigma}^2$     rozptyl náhodné složky, obvykle  $\hat{\sigma}^2 = SS_E / (n-p)$   
zanedbáme-li nepřesnost měření

$\mathbf{X}$     matice návrhu (odpovídá modelu plochy)

$\mathbf{x}_o^T$     řádkový vektor určený optimálními podmínkami,  
struktura odpovídá řádkům matice  $\mathbf{X}$

# Literatura

Box, G.E.P. (1957): Evolutionary Operation: A Method for Increasing Industrial Productivity, Applied Statistics, 6, 81-101

Myers, R.H., Montgomery, D.C. (2002): Response Surface Methodology, Wiley

Ryan, T.P. (2000): Statistical Methods for Quality Improvement, Wiley

Jarošová, E. (2007): Navrhování experimentů a jejich analýza, ČSJ