

Přednáška na semináři OSSM-ČSJ dne 19. 11. 2015

HOMOGENNÍ I NEHOMOGENNÍ PROCESY ROZENÍ, IMIGRACE A UMÍRÁNÍ A UKÁZKY JEJICH APLIKACE PŘI ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH TECHNICKÝCH PROBLÉMŮ

Ing. Vratislav Horálek, DrSc.

1 Vlastnosti procesů rození, imigrace a umírání

Všeobecně je známo, že celá řada sociálních odvětví – jako je školství, zdravotnictví, pojišťovnictví a další - je založena na demografických studiích obyvatelstva. Při analýzách takových studií se pracuje s modely, které přihlížejí ke třem základním procesům a to: rození, umírání a imigrace, přičemž intenzita každého z těchto procesů je obecně funkcí času t a tedy intenzity těchto tří procesů mohou být označeny: $\lambda(t)$ pro proces rození, $\nu(t)$ pro proces imigrace a $\mu(t)$ pro proces umírání a obecně jsou pozitivní a spojité funkce v intervalu $T = (0; +\infty)$.

Nicméně v praxi se setkáváme s celou řadou technických procesů, jejichž analýza se zdá na první pohled složitá, ale lze si ji usnadnit aplikací modelů výše uvedeného typu. První ukázka aplikace bude z oblasti sušárenství a bude zaměřena na analýzu procesu sušení zrní na vibrofluidním žlabu (**viz**

kapitola 2). Druhá ukázka bude z oblasti fyzikální metalurgie a bude se týkat analýzy procesu nukleace a růstu grafitu u temperovaných litin (**viz kapitola 3**); řešení tohoto problému bylo mnohem náročnější a složitější než řešení problému sušárenského, poněvadž v tomto případě musela být experimentální data získávána z měření v rovinách metalografických výbrusů a parametry prostorové struktury musely být odhadovány pomocí stereologických závislostí.

Cílem každého experimentu je objevit a popsat chování probíhajících procesů, zvláště v případě, probíhá-li současně několik - dokonce se vzájemně ovlivňujících – procesů. Na druhé straně máme možnost získat v každém časovém okamžiku t z intervalu $T = (0; \infty)$ hodnotu, které nabyla celočíselná náhodná veličina $\xi(t)$, tedy počtu jedinců v čase t a pomocí nich získat odhad prvních tří momentů

$$\alpha_i(t) = E[\xi^i(t)] \quad \text{pro } i = 1, 2, 3$$

studovaného nehomogenního procesu zatím nespecifikovaného typu procesu rození-imigrace-umírání.

V člancích [7] a [8] jsou odvozeny následující nutné podmínky pro jednotlivé procesy typu rození, imigrace a umírání platné pro každé t z intervalu T :

a) v každém procesu rození-umírání platí:

$$\frac{\alpha_1(t)[\alpha_3(t) - \alpha_1(t)]}{\alpha_2^2(t) - \alpha_1^2(t)} = \frac{3}{2};$$

b) v každém procesu rození platí:

$$\frac{\alpha_1(t) [2\alpha_1(t) - 1]}{\alpha_2(t)} = 1$$

a

$$\frac{\alpha_3(t) - \alpha_1(t)}{[\alpha_1(t) + \alpha_2(t)][\alpha_1(t) - 1]} = 3;$$

c) v každém procesu umírání platí:

$$A(t) > 1 \text{ a } B(t) < 3,$$

kde

$$A(t) = \frac{\alpha_1(t) [\alpha_1(t) + 1]}{\alpha_2(t)}$$

a

$$B(t) = \frac{\alpha_3(t) - \alpha_1(t) [\alpha_1^2(t) + 1]}{\alpha_1^2(t)} ;$$

d) v každém procesu rození-imigrace umírání platí:

$$A(t) < 1 \text{ a } B(t) > 3,$$

kde funkce $A(t)$ a $B(t)$ mají tvar uvedený v bodě c);

e) v každém procesu imigrace umírání platí:

$$A(t) = 1 \text{ a } B(t) = 3,$$

kde funkce $A(t)$ a $B(t)$ mají tvar uvedený v bodě c);

Připomeňme si trochu historie z oblasti procesů rození, imigrace a umírání. Jako první je nutno jmenovat práce N. Arleyho (viz [1] a [2]) a následující studii M.S.Bartletta [3], která se týká modelů s konstantními intenzitami rození (λ), imigrace (ν) a umírání (μ). Teprve D. G. Kendall [4] jako první nabízí tzv. zobecněný (generalized) model procesu rození, imigrace a umírání $\{\lambda(t); \nu(t); \mu(t)\}$, jehož anglický název „generalized“ byl později celosvětově změněn na „non-homogeneous“.

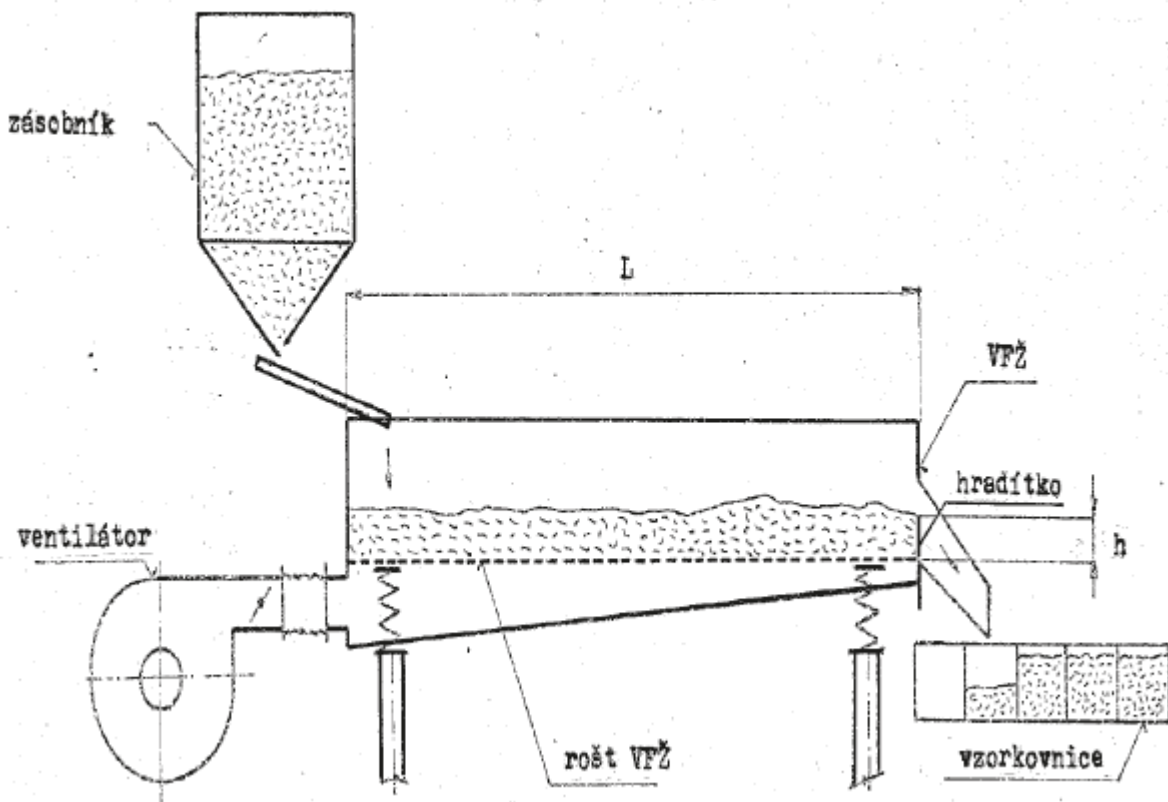
Práce V. Horálka [5] až [9] dotvářejí analýzu celé rodiny homogenních i nehomogenních procesů rození, imigrace, umírání a přinášejí pro praxi nesmírně cennou informaci ve formě tzv. nutných podmínek pro každý z typů procesu celé analyzované rodiny těchto procesů. V praxi totiž celá řada technických procesů probíhá současně s dalšími procesy, z nichž některé a každý z nich ovlivňuje základní proces s jinou intenzitou. Tomu tak je převážně v hutnických procesech, kdy jejich ovládním lze výrazně zvýšit vlastnosti materiálu na výstupu.

Dále v textu budeme používat pro procesy rození, imigrace a umírání zkratky „procesy RIU“.

2 Aplikace nehomogenních procesů RIU při analýze sušení zrní na vibrofluidním žlabu (VFŽ)

2.1 Diskuse dějů probíhajících na VFŽ

Jednou z progresivních technologií používanou při sušení zrní je sušení na vibrofluidním žlabu. Schéma takového zařízení viz **obr. 1**.



Obr. 1 Schéma experimentálního zařízení (VFŽ)

K popisu stochastických dějů probíhajících na žlabu se používalo většinou modelů založených na unášení proudu tekutiny a chápaných většinou jako děje difusního charakteru. Toto pojetí však ze svých úvah zcela vypouští heterogenitu toku materiálu unášeného na žlabu a to jak z hlediska hmotnosti částic (tok materiálu je chápán jako tok kapaliny) a tedy nerespektuje možné vlivy rychlosti přiváděného

plynného média na vyplavování lehčích částic na povrch vrstvy materiálu. Důsledkem stávajícího vibračního pohybu žlabu a přivádění vzduchu dnem žlabu nebude zřejmě homogenizace unášené vrstvy materiálu, ale naopak její segregace. Tato hmotnostní směrová heterogenita materiálu v rovině kolmé na dno žlabu a jeho podélnou osu nebude asi stejná po celé délce žlabu, ale bude funkcí její vzdálenosti od začátku žlabu a v každém případě ovlivní vlastnosti rozdělení doby pobytu částice (zrna) na žlabu.

2.2 Příprava experimentu

Označíme-li $f(t)$ hustotu pravděpodobnosti doby t setrvání zrna na žlabu a $F(t)$ příslušnou distribuční funkci, potom intenzita umírání $\mu(t)$ v čase t (fyzikálně vzato doba setrvání zrna na žlabu rovná t) má tvar

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{1 - \int_0^t f(\tau) d\tau} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}.$$

Tím je úloha zjištění intenzity $\mu(t)$ převedena na úlohu stanovení vhodného tvaru hustoty pravděpodobnosti $f(t)$ respektující fyzikální parametry procesu nastavené na VFŽ.

Sondážní experiment byl postaven na těchto podmínkách:

- a) vstupní frekvence vibračního pohybu $f_v = 23$ Hz a mezivrstvová rychlost vzduchu přiváděného pod rošt VFŽ označovaná $v_L = 2,0$ m.s⁻¹ s následnou stabilizací transportního procesu;

- b) obarvená zrna v dávce byla předem jednotlivě zvážena a dávka najednou vsypána na skluzový žlábek dávkovacího zařízení, aby byl zajištěn minimální časový rozdíl mezi prvním a posledním zrnem (teoreticky je uvažován stejný časový okamžik vsypu všech zrn dávky na VFŽ);
- c) vzorkovací interval δ musí být stejný a nesmí přesáhnout 50 s a hmotnost jednotlivých dávek obarvených zrn přibližně stejná;
- d) při reprodukci pokusu musí být hmotnosti dávek obarvených zrn vkládaných na skluzový žlábek vždy stejné;
- e) experiment se vždy uzavře následujícím dosti dlouhým chodem žlabu za stejných podmínek při neustálém doplňování zásobníku neobarvenými zrny;
- f) dílčí vzorky odebrané na konci žlabu musí být průběžně číslovány (k zajištění jejich časové posloupnosti, po skončení experimentu musí být obsahy jednotlivých vzorkovnic zváženy, stanoven počet a hmotnost zrn sledované barvy ve vzorku);
- g) po skončení experimentu musí být žlab zcela vyprázdněn a stanovena celková hmotnost tohoto zbytku zrn, stejně jako hmotnost zrn sledované barvy tohoto zbytku na žlabu.

2.3 Stanovení tvaru hustoty pravděpodobnosti $f(t)$ a porovnání teoretických hodnot s empirickými

Uvažována byla tato rozdělení pravděpodobnosti:

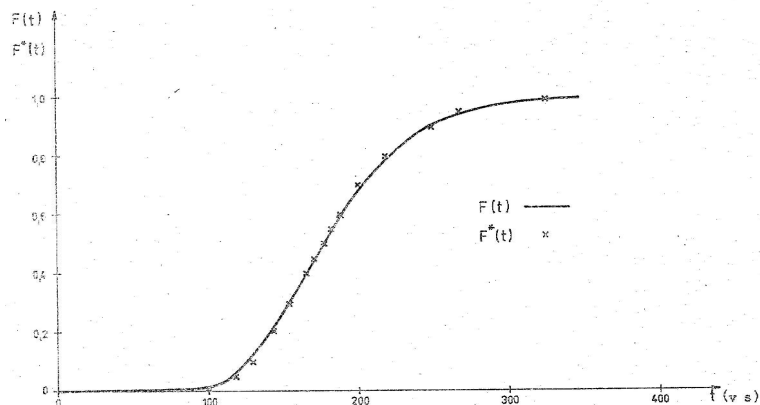
- Weibullovo tříparametrické rozdělení;
- gama rozdělení;
- logaritmicko-normální rozdělení.

Nejllepší přiléhavost byla zjištěna pro

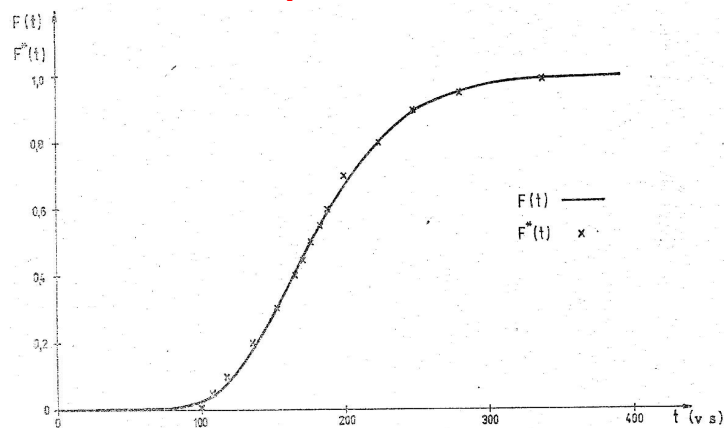
- $f(t)$ sledující logaritmicko-normální rozdělení při vzorkovacích intervalech $\delta = 5$ s a 50 s.

Pro tyto dvě úrovně parametru δ je na **obr. 2a a 2b** zakreslen průběh teoretické distribuční funkce $F(t)$ a hodnoty empirické distribuční funkce $F^*(t)$ a na **obr. 3a a 3b** průběh teoretické intenzity umírání $\mu(t)$ a napozorované hodnoty empirické intenzity $\mu^*(t)$.

a) $\delta = 5$ s

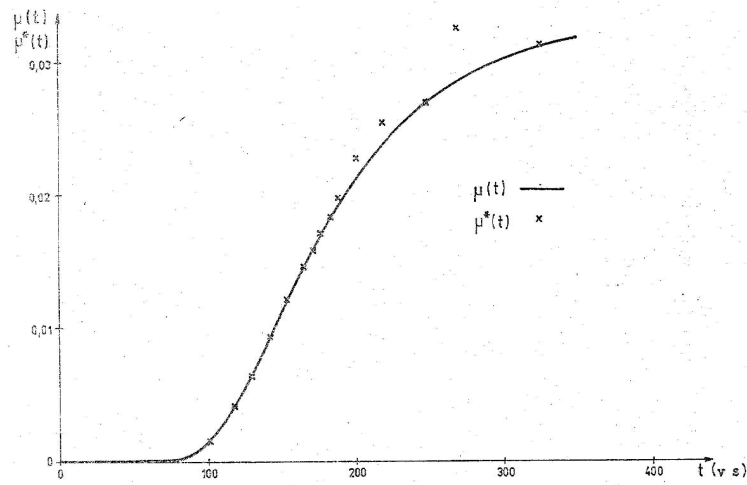


b) $\delta = 50$ s

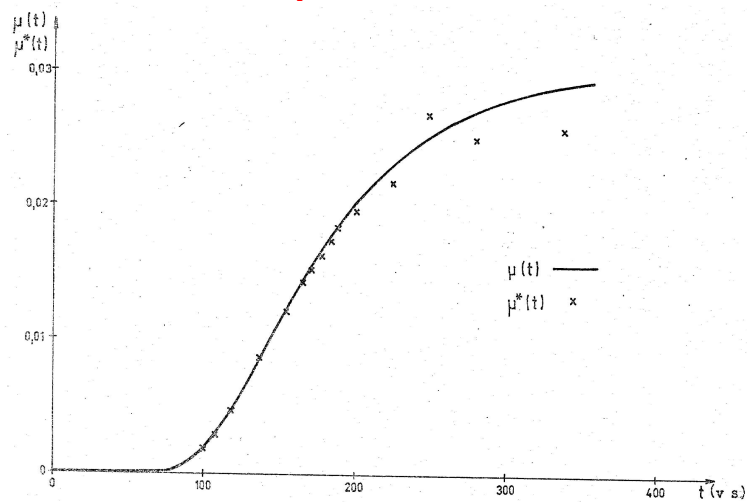


**Obr. 2 Teoretická distribuční funkce $F(t)$ a empirická distribuční funkce $F^*(t)$ rozdělení doby pobytu zrna žlabu při vzorkovacím intervalu:
a) $\delta = 5$ s; b) $\delta = 50$ s**

a) $\delta = 5$ s



b) $\delta = 50$ s



**Obr. 3 Průběh teoretické intenzity umírání $\mu(t)$ a napozorované hodnoty empirické intenzity $\mu^*(t)$.
při vzorkovacím intervalu:
a) $\delta = 5$ s; b) $\delta = 50$ s**

2.4 Shrnutí nových poznatků z realizace a analýzy experimentu

Závěry mohou být shrnuty do těchto bodů:

- a) experiment musí splňovat fyzikální předpoklady kladené na procesy;
- b) rozdělení $f(t)$ doby pobytu zrna na žlabu lze velmi dobře aproximovat logaritmicko-normálním rozdělením, jehož parametry lze odhadnout, a to jak pro případ úplného, tak cenzorovaného výběru, je-li experiment ukončen dříve než VFŽ opustí všechna obarvená zrna;
- c) vzorkovací interval δ silně ovlivňuje parametry hustoty pravděpodobnosti $f(t)$, a měl by být při experimentu volen vždy co nejkratší;
- d) transportní proces z hlediska rychlosti proudu zrn žlabem není stacionární;
- e) byla prokázána stacionarita dávkovacího zařízení;
- f) byla prokázána závislost doby pobytu zrna na žlabu na jeho hmotnosti;
- g) průchod zrna žlabem byl popsán nehomogenním procesem umírání, který je markovským procesem se spojitým časem a rozpojitými stavy; tento model není závislý na předpokladech o konstantní rychlosti průchodu, pístovém toku, homogenitě unášeného materiálu, konstantní intenzitě mísení materiálu (difusi) apod., které se v dosavadních modelech objevují, ale předložený model respektuje pouze zjištěné chování zrna na žlabu za daných podmínek režimu chodu VFŽ;

- h) transport zrní vibrofluidním žlabem nepřispívá k homogenizaci toku zrn, ale naopak k segregaci zrn vzhledem k hmotnosti zrna;
- i) k odstranění segregace bylo doporučeno vybavit stávající VFŽ (zvláště v jeho druhé polovině) zařízením, které by převádělo stávající směrovou heterogenitu na náhodnou heterogenitu toku zrn unášeného žlabem.

3 Aplikace nehomogenních procesů rození, imigrace a umírání při studiu nukleační schopnosti grafitu u temperovaných litin

3.1 Fyzikální interpretace procesů rození, imigrace a umírání

V šedesátých letech minulého století nacházela temperovaná litina stále větší uplatnění. Při studiu použitelnosti tohoto materiálu byla zcela mimořádná pozornost věnována strukturním změnám při žíhání, které určují vlastnosti vyžíhaných výrobků. Ke skupině dosud nejasných otázek v poznání strukturních přeměn patřily vztahy mezi rychlostí 1. stupně grafitizace a rychlostmi nukleace a růstu částic grafitu. Řešení problému vyžadovalo analýzu obou zmíněných procesů.

Abychom při konstrukci dynamického modelu nukleace grafitu vycházeli z co nejobecnějších podmínek, předpokládali jsme, že

♥ vznik zárodku je určen jedním, nebo dvěma ději:

- ♦ první z nich má tu vlastnost, že jeho intenzita $\lambda(t)$ je funkcí prodlevy t a spolu s dosaženým stavem, tj. počtem existujících zárodků v čase t , ovlivňuje počet dalších vznikajících zárodků (tzv. proces rození);
- ♦ druhý probíhající děj nezávisí na dosaženém počtu zárodků v čase t a má intenzitu $\nu(t)$, jejíž tvar je určen již podmínkami před prvním stupněm grafitizace (tzv. proces imigrace);

POZNÁMKA V podstatě je

♣ mechanismus procesu rození

interpretován pomocí dynamických poruch krystalové mřížky representovaných kondensacemi vakancí a

♣ mechanismus procesu imigrace

interpretován pomocí submikroskopických dutinek, které se vytvořily v průběhu tuhnutí a ochlazování litiny.

♥ zánik zárodků: kromě dvou výše uvedených dějů, ovlivňujících vznik zárodků probíhá současně s intenzitou $\mu(t)$ i zánik zárodků (tzv. proces umírání), který se uskutečňuje rozpouštěním a srůstáním stabilních zárodků, resp. částic grafitu.

3.2 Důsledek současného průběhu dějů vzniku a zániku zárodků

V důsledku současného průběhu obou protichůdných dějů – vzniku a zániku zárodků – obsahují provedená měření vždy jen rezultat obou těchto dějů, tedy počet existujících zárodků

v konkrétním čase t . Zpracování těchto dat a tedy umožňuje získat odhad obecných momentů $\alpha_i(t)$, $i = 1, 2$ a 3 . Tyto obecné momenty rozdělení počtu zárodků měřitelných v čase t v jednotce objemu materiálového vzorku, vystupují v tzv. nutných podmínkách pro jednotlivé procesy typu rození, imigrace a umírání; tyto podmínky musí být splněny pro každé t z intervalu $T = (0; +\infty)$ a jejich analytické tvary jsou specifikovány v kapitole 1.

3.3 Stručný popis experimentů a jejich analýz

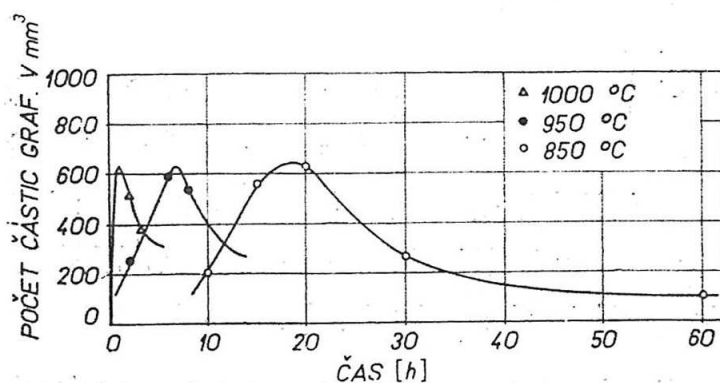
Vlastní analýza procesu nukleace grafitu byla uskutečněna celkem na devíti souborech pocházejících ze tří taveb, přičemž byla sledována při třech různých teplotách. Pro každou z těchto teplot byly získány časové průběhy procesu nukleace pro různé časové prodlevy t .

Chemické složení pokusných tří taveb (A-3, B-1, A-5) je shrnuto v tabulce 1. Příslušné křivky nukleace grafitu jsou zachyceny na obr. 4a, 4b a 4c.

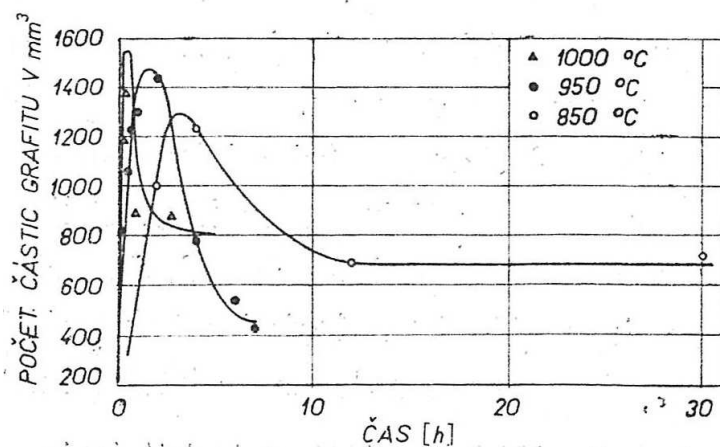
Tabulka 1 – Chemické složení pokusných taveb

Označení tavy	C %	Si %	Mn ^o %	P %	S %	Cr %	Al %
A-3	2,40	0,60	0,47	0,100	0,148	0,035	0,030
B-1	2,63	1,07	0,52	0,088	0,155	0,080	0,017
A-5	2,34	1,55	0,48	0,088	0,154	0,048	0,022

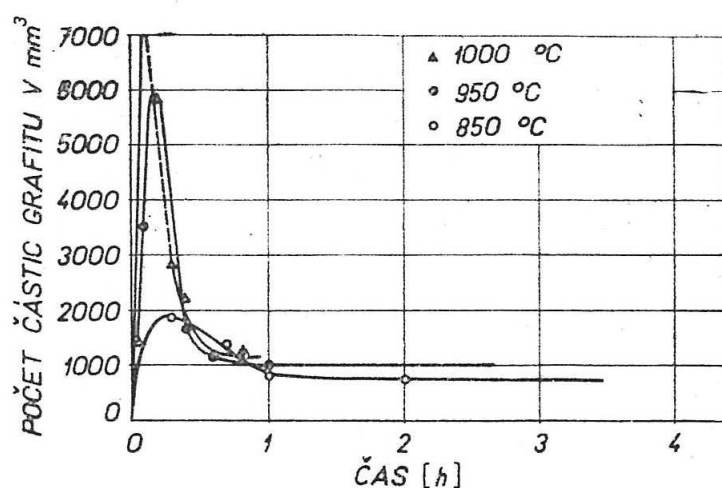
a) Tavba A-3



b) Tavba B-1



c) Tavba A-5



Obr. 4 – Křivky nukleace grafitu pro: a) tavbu A-3; b) tavbu B-1 a c) tavbu A-5

Do závěrečných úvah byly zahrnuty všechny možné typy procesů $\{ \lambda(t), \nu(t), \mu(t) \}$, které s ohledem na mechanismus procesu nukleace by mohly přicházet v úvahu při jeho popisu. Jak bylo uvedeno, analytické tvary těchto nutných podmínek pro každý z nehomogenních procesů jsou specifikovány v kapitole 1 tohoto příspěvku. Z porovnání vyplynulo, že

- a) **pro nesplnění kritérií** je třeba z úvah vyloučit následující procesy:
- samostatný proces umírání,
 - samostatný proces rození,
 - proces rození-umírání,
 - proces imigrace-umírání;
- b) **naopak jsou splněna kritéria:** $A(t) < 1$ a $B(t) > 3$ charakterizující nehomogenní proces rození-imigrace-rození.

Připomeňme, že vlastní analýza procesu nukleace grafitu byla uskutečněna celkem na devíti souborech pocházejících ze tří taveb, přičemž byla sledována na třech různých úrovních teplot. Pro každou z těchto teplot byly získány časové průběhy procesu nukleace pro různé časové prodlevy t (viz obr. 4).

V rovinách metalografických výbrusů materiálových vzorků byla provedena potřebná měření a získané výsledky zpracovány a použity ve stereologických vztazích pro odhady parametrů prostorové struktury. Výsledky a závěry jsou shrnuty v práci [9], která obsahuje především teoretické modely, a v práci [10], která si všímá především fyzikální

interpretace dějů podílejících se na procesu nukleace grafitu.

Práce [10] byla přednesena na 30. mezinárodním slévárenském sympoziu. O velkém zájmu o tuto problematiku svědčila skutečnost, že práce byla v rozšířené formě vyžádána a přednesena na Mez. slévárenském symposium ASTM v Kanadě [11].

Literatura

- [1] N. Arley *On the general birth and death with immigration stochastic processes*. Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1967
- [2] N. Arley *On the theory of stochastic processes and their application to the theory of cosmic radiation*. Gad Copenhagen 1943 and Wiley, New York 1948
- [3] M. Bartlett *An introduction to stochastic process with spacial referenceto methods and applications*. Cambridge University Press, 1955
- [4] D.G.Kendall *On the generalized birth-and-death process*. Ann. Math. Statist.19(1948), 1-15
- [5] V. Horálek *On some types of non-homogeneous birt-immigration-death prcesses*. Aplikace matematiky (ČSAV) 9(1964), 421-434
- [6] V. Horálek *Non-homogeneous birth-death process with constant ratio of rates*. Aplikace matematiky (ČSAV)11(1966), 296-302
- [7] V. Horálek *On the moments in non-homogeneous birth, immigration and death processes*. Aplikace matematiky 15(1970), 31-40
- [8] V. Horálek *On non-homogeneous birth-immigration-death processes*. Coll. Math. Statistics János Bolyai (9.European Meeting of Statisticians, Budapest, 1972)
- [9] V. Horálek *Nehomogenní procesy rození-imigrace-umírání a jejich aplikace při studiu nukleační schopnosti grafitu v temperovaných litinách*. Sborník referátů 2. mez. konference o aplikacích matematické statistiky (KAMS 2), Liblice, 1965, 30-48
- [10] S. Drápal, V. Horálek *Keimbildung und Wachsen des Graphits in Temperguss*. Proc. of 30th Inter. Symposium on Casting, Praha 1963, 310-338
- [11] S. Drápal, V. Horálek *Nucleation of graphite in malleable cast iron*. Trans. of ASTM Cast Iron Seminar, Detroit (CAN) , 1964, 481-508
Přetištěno: Kovové materiály (ČSAV) 3(1965), 34-51,